MA211 - Lista 12

Teorema de Green

24 de novembro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ♦ ([1], seção 16.4) Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

$$\int_C y^3\,dx - x^3\,dy,\ C \text{ é o círculo } x^2+y^2=4.$$

Solução: Observe que a curva C com orientação positiva está nas hipóteses do Teorema de Green, assim como o campo $\mathbf{F}(x,y)=(y^3,-x^3)$. Logo,

$$\int_C y^3\,dx - x^3\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3)\right)dA = -3\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dA,$$

em que $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$. Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \end{cases}$$

temos que a região de integração D pode ser escrita como

$$\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi\}$$

e o jacobiano dessa mudança de coordenadas é igual a r. Logo,

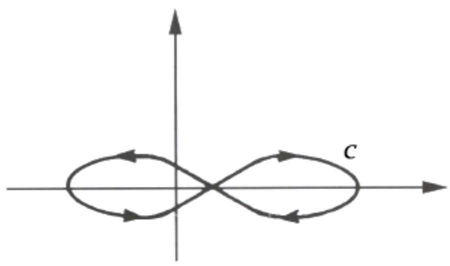
$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cdot r\,drd\theta = 8\pi.$$

Portanto, $\displaystyle\int_C y^3\,dx - x^3\,dy = -24\pi.$

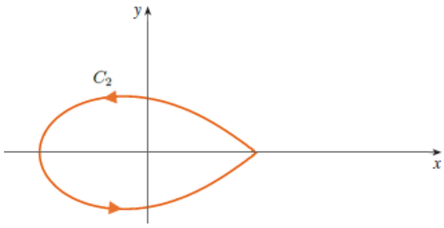
2. ♦ ([2], seção 8.2) Calcule

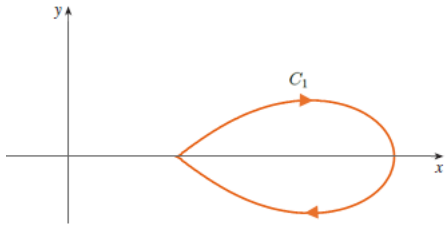
$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

em que C é a curva



Solução: Podemos escrever C como $C_1\cup C_2$, em que C_1 e C_2 são as curvas dadas abaixo.



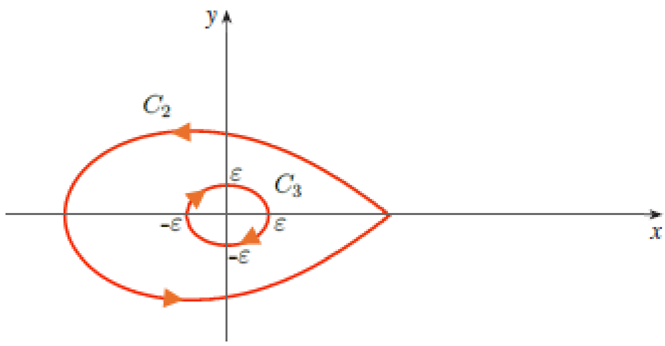


Seja A um aberto simplesmente conexo que contém C_1 e não contém a origem. O campo $\mathbf{F}$ restrito a A é conservativo, pois A é aberto e simplesmente conexo, $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ e $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ possuem derivadas de primeira ordem contínuas em A e P e Q satisfazem a relação $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Então,

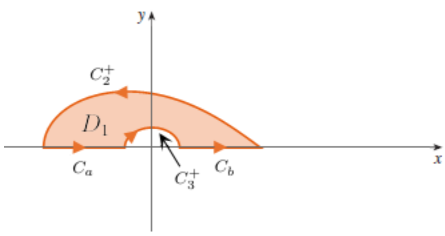
$$\oint_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

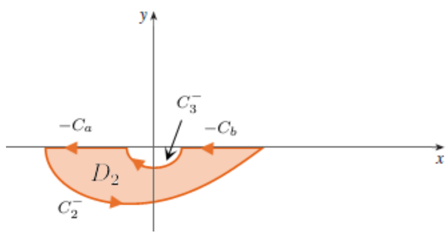
Não podemos proceder de maneira análoga em C_2, já que todo aberto B que contém a curva C_2 e não contém a origem não será simplesmente conexo. Com isso, não conseguimos garantir que o campo $\mathbf{F}$ restrito a B é conservativo (observe que, a princípio, não podemos afirmar que o campo é não conservativo).

A ideia para contornar esse problema é “isolar” a origem com uma curva fechada C_3, a princípio arbitrária. Vamos escolher essa curva C_3 de maneira conveniente para que consigamos resolver o problema. Seja $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente para que a curva C_3 parametrizada por $r(t) = (\varepsilon\cos t, \varepsilon \operatorname{sen} t)$, com t variando de 2π a 0, não intercepte a curva C_2 e esteja entre a curva C_2 e a origem.



Considere $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)$ está entre C_2 e C_3 e $y \geq 0\}$ e $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)$ está entre C_2 e C_3 e $y \leq 0\}$. As curvas que delimitam D_1 e D_2 são $C_{D_1} = C_2^+ \cup C_a \cup C_3^+ \cup C_b$ e $C_{D_2} = C_2^- \cup -C_b \cup C_3^- \cup -C_a$, respectivamente, e estão ilustradas a seguir.





Note que

$$\oint_{C_{D_1}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_a} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{1}$$

e

$$\oint_{C_{D_2}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2^-} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_a} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3^-} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{2}$$

Como $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, temos, pelo Teorema de Green,

$$\oint_{C_{D_1}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_{D_1} 0\,dA = 0$$

e

$$\oint_{C_{D_2}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_{D_2} 0\,dA = 0.$$

Somando as equações 1 e 2, obtemos

$$\int_{C_2^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2^-} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3^-} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0,$$

isto é,

$$\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Assim, basta determinar $\int_{-C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. A parametrização de $-C_3$ é $r(t) = (\varepsilon\cos t, \varepsilon \operatorname{sen} t)$, com t variando de 0 a 2π. Daí,

$$\begin{aligned}\int_{-C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\varepsilon \operatorname{sen} t}{\varepsilon^2}, \frac{\varepsilon\cos t}{\varepsilon^2}\right)\cdot(-\varepsilon\operatorname{sen} t, \varepsilon\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 + 2\pi = 2\pi.$$

3. (Teste, 2013) Demonstre que se R é uma região no plano limitada por uma curva C simples, fechada e suave por partes, então a área de R, denotada por $A(R)$, pode ser dada por

$$\oint_C x\,dy,$$

em que a curva está orientada no sentido positivo.

Solução: Temos que

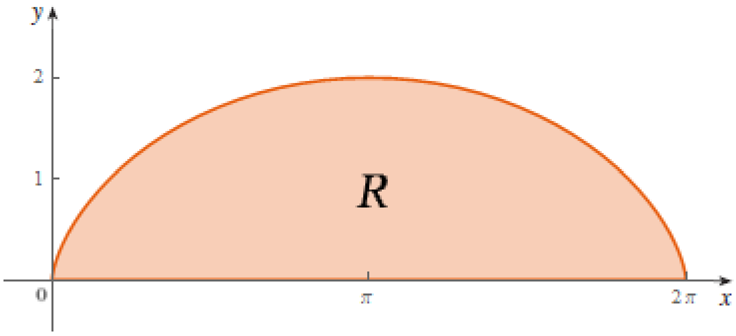
$$A(R) = \iint\limits_R 1\,dA.$$

A fim de utilizar o Teorema de Green, devemos encontrar funções P e Q que tenham derivadas de primeira ordem contínuas em um aberto que contenha a curva C e o interior de C e que satisfaçam a relação $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Observe que a curva C já satisfaz as hipóteses desse teorema e C é a fronteira de R. Um exemplo de funções P e Q é $P(x, y) = 0$ e $Q(x, y) = x$. Portanto, pelo Teorema de Green,

$$\iint_R 1\, dA = \oint_C 0\, dx + x\, dy = \oint_C x\, dy.$$

4. ★ ([1], seção 16.4) Calcule a área sob um arco da cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.

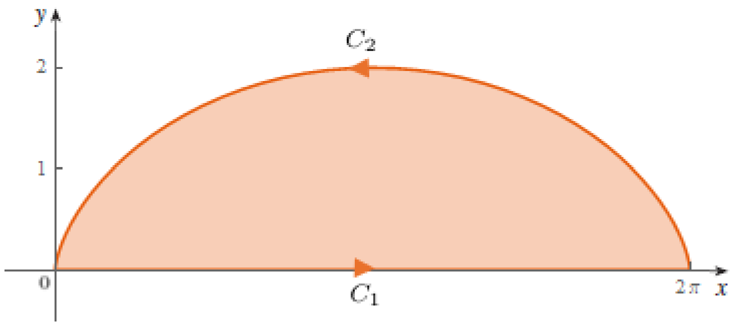
Solução: Queremos determinar a área da região R mostrada na figura abaixo.



Sabemos que, se $y = f(x)$, então a integral $\int_a^b f(x)dx$ calcula a área que está abaixo do gráfico de f e acima do eixo x, com x variando entre a e b. A princípio, poderíamos tentar encontrar uma expressão que relacionasse $x(t)$ e $y(t)$ na parametrização da cicloide, mas esse parece ser um trabalho difícil. Usaremos então o que foi provado no exercício anterior. Temos que

$$A(R) = \oint_C x\, dy,$$

em que $C = C_1 \cup C_2$ é a curva descrita na figura a seguir.



Uma parametrização de C_1 é $r_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 0)$, em que $0 \leq t \leq 2\pi$. Nesse caso, $y_1'(t) = 0$. Logo,

$$\oint_{C_1} x\, dy = \int_0^{2\pi} (t)(0)\, dt = 0.$$

Uma parametrização de C_2 é $r_2(t) = (x_2(t), y_2(t)) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, em que t varia de 2π a 0. Nesse caso, $y_2'(t) = \operatorname{sen} t$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\oint_{C_2} x\,dy &= \int_{2\pi}^{0} (t - \operatorname{sen} t)(\operatorname{sen} t)\,dt \\
&= \int_{0}^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t - t \operatorname{sen} t)\,dt \\
&= \int_{0}^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2}\,dt - \int_{0}^{2\pi} t \operatorname{sen} t\,dt \\
&= \pi + 2\pi = 3\pi.
\end{aligned}
$$

Portanto, a área da região é 3π.

(Observe que, para resolver a integral $\int_0^{2\pi} t \operatorname{sen} t\,dt$, usamos integração por partes com $u = t$ e $dv = \operatorname{sen} t\,dt$.)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ♦ ([1], seção 16.4) Calcule a integral de linha por dois métodos: **(I)** diretamente e **(II)** utilizando o Teorema de Green.

   a) $\displaystyle\oint_C (x-y)dx + (x+y)dy$, C é o círculo com centro na origem e raio 2.

   b) $\displaystyle\oint_C xy\,dx + x^2\,dy$, C é o retângulo com vértices $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$ e $(0,1)$.

   c) ★ $\displaystyle\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy$, C é o triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,2)$.

6. ♦ ([1], seção 16.4) ([2], seção 8.2) Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

   a) $\displaystyle\int_C e^y\,dx + 2xe^y\,dy$, C é o quadrado de lados $x=0$, $x=1$, $y=0$ e $y=1$.

   b) $\displaystyle\int_C (y+e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x+\cos y^2)\,dy$, C é a fronteira da região englobada pelas parábolas $y=x^2$ e $x=y^2$.

   d) ★ $\displaystyle\int_C \operatorname{sen} y\,dx + x\cos y\,dy$, C é a elipse $x^2+xy+y^2=1$.

   e) $\displaystyle\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$, C curva fechada, C^1 por partes, simples e fronteira de um conjunto B cujo interior contém o círculo $x^2+y^2\leq 1$. (Sugestão: Aplique o Teorema de Green à região K compreendida entre a curva C e a circunferência.)

7. ♦ ([1], seção 16.4) ([2], seção 8.2) Use o Teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o Teorema.)

   a) $\mathbf{F}(x,y) = (\sqrt{x}+y^3, x^2+\sqrt{y})$, C consiste no arco da curva $y=\operatorname{sen} x$ de $(0,0)$ a $(\pi,0)$ e no segmento de reta $(\pi,0)$ a $(0,0)$.

   b) $\mathbf{F}(x,y) = (e^x+x^2y, e^y-xy^2)$, C é a circunferência $x^2+y^2=25$, orientada no sentido horário.

   c) $\mathbf{F}(x,y) = (2x+y)\,\mathbf{i} + (3x-y)\,\mathbf{j}$, C é uma curva fechada, simples, C^1 por partes, orientada no sentido positivo, cuja imagem é a fronteira de um compacto B com área α.

   d) $\mathbf{F}(x,y) = 4x^3y^3\,\mathbf{i} + (3x^4y^2+5x)\,\mathbf{j}$, C é a fronteira do quadrado de vértices $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

8. ([1], seção 16.4) Use o Teorema de Green para achar o trabalho realizado pela força
   $\mathbf{F}(x,y) = x(x+y)\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x até $(1,0)$, em seguida ao longo de um segmento de reta até $(0,1)$ e então de volta à origem ao longo do eixo y.

9. ⧫ (Prova, 2014) Determine o trabalho $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado pelo campo de força
$$\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2)\,\mathbf{j}$$
em uma partícula que inicialmente está no ponto $(-2, 0)$, se move ao longo do eixo x para $(2, 0)$ e então se move ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial.

10. (Prova, 2014) Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, em que
$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y)\,\mathbf{i} + (3x - y^2)\,\mathbf{j}$$
e C é a fronteira orientada positivamente de uma região D que tem área 6.

11. (Exame, 2014) Calcule o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo da reta $y = x$ até $(1, 1)$ e então de volta à origem ao longo da curva $y = x^2$.

12. (Teste, 2013) Calcule a área da região R delimitada pela cardioide $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, em que $x(t) = 2\cos t - \cos 2t$ e $y(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,2t$, $t \in [0, 2\pi]$.

13. ⧫ ([2], seção 8.2) Calcule a área da região limitada pela elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$,
$0 \le t \le \pi/2$, em que $a > 0$ e $b > 0$.

14. ([3], seção 18.4) Calcule a área da região limitada pela astroide $x = \cos^3 t$, $y = \mathrm{sen}^3\,t$,
$0 \le t \le 2\pi$.

15. ([1], seção 16.4) Se uma circunferência C de raio 1 rola ao longo do interior da circunferência $x^2 + y^2 = 16$, um ponto fixo P de C descreve uma curva chamada epicicloide, com equações paramétricas $x = 5\cos t - \cos 5t$, $y = 5\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,5t$. Faça o gráfico da epicicloide e calcule a área da região que ela envolve.

16. ([1], seção 16.4)

a) Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2), mostre que
$$\int_C x\,dy - y\,dx = x_1y_2 - x_2y_1.$$

b) Se os vértices de um polígono, na ordem anti-horária, são
$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$
mostre que a área do polígono é
$$A = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)].$$

c) Determine a área do pentágono com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ e $(-1, 1)$.

17. ([1], seção 16.4) Seja D a região limitada por um caminho fechado e simples C no plano xy. Utilize o Teorema de Green para demonstrar que as coordenadas do centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de D são

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2 \, dy \qquad\qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2 \, dx,$$

em que A é a área de D.

18. ([1], seção 16.4) Utilize o exercício 17 para encontrar o centroide de um quarto de uma região circular de raio a.

19. ★ ([1], seção 16.4) Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado simples que não passe pela origem e nem a circunde.

20. ([1], seção 16.4) Utilize o Teorema de Green para demonstrar a fórmula de mudança de variáveis para as integrais duplas para o caso em que $f(x, y) = 1$:

$$\iint\limits_R dxdy = \iint\limits_R \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

Aqui, R é a região do plano xy que corresponde à região S do plano uv sob a transformação dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$. (Sugestão: observe que o lado esquerdo é $A(R)$. Converta a integral de linha sobre ∂R para uma integral de linha sobre ∂S e aplique o Teorema de Green no plano uv.)

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. **a)** 8π.
   b) $\frac{9}{2}$.
   c) $\frac{2}{3}$.

6. **a)** $e - 1$.
   b) $\frac{1}{3}$.
   d) 0.
   e) 2π.

7. **a)** $\frac{4}{3} - 2\pi$.
   b) $\frac{625\pi}{2}$.
   c) $2\times$(Área de B).
   d) 10.

8. $-\frac{1}{12}$.

9. 12π.

10. 12.

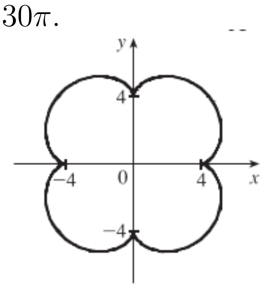
11. $\frac{1}{12}$.

12. 6π.

13. πab.

14. $\frac{3\pi}{8}$.

15. 30π.



16. **a)** Use as equações paramétricas do segmento de reta: $x = (1-t)x_1 + tx_2$ e $y = (1-t)y_1 + ty_2$, $0 \leq t \leq 1$.
    b) Aplique o Teorema de Green ao caminho $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$, onde C_i é o segmento ligando o ponto (x_i, y_i) ao ponto (x_{i+1}, y_{i+1}), para cada $i = 1, \cdots, n-1$.

c) $\frac{9}{2}$.

17. $\frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy = \frac{1}{2A}\iint_D 2x\,dA = \bar{x}$ e $-\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx = -\frac{1}{2A}\iint_D(-2y)\,dA = \bar{y}$

18. $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$, se a região for a parte do disco $x^2 + y^2 = a^2$ no primeiro quadrante.

19. Dica: como C é um caminho fechado simples que não passa pela origem e não circunda a origem, então existe uma região aberta A que ainda não contém a origem, mas contém D, a região limitada por C. Em A, tanto $-y/(x^2+y^2)$ quanto $x/(x^2+y^2)$ possuem derivadas parciais contínuas e podemos aplicar o Teorema de Green. Conclua usando o exercício 23 da Lista 11.

20. Dica: pelo Teorema de Green, $A(R) = \iint_R \, dxdy = \int_{\partial R} x \; dy$. Escolhendo a orientação positiva em ∂S correspondente a orientação positiva em ∂R, segue que
$$\int_{\partial R} x \; dy = \int_{\partial S} g(u,v)\frac{\partial h}{\partial u} \; du + g(u,v)\frac{\partial h}{\partial v} \; dv.$$
Conclua utilizando o Teorema de Green no plano uv e a Regra da Cadeia.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 3, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] C. H.,Edwards Jr; D. E. Penney, *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 2 e 3, Prentice Hall do Brasil, 1997.