MA211 - Lista 11

Teorema Fundamental das Integrais de Linha

23 de novembro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ([1], seção 16.3) Determine se $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (e^x + x\cos y)\,\mathbf{j}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

   Solução: Primeiramente, temos que o domínio de $\mathbf{F}$ é todo o $\mathbb{R}^2$, o qual é uma região aberta e simplesmente conexa. Sendo $P(x, y) = ye^x + \operatorname{sen} y$ e $Q(x, y) = e^x + x\cos y$, temos que P e Q possuem derivadas de primeira ordem contínuas. Também temos que

   $$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + \cos y \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + \cos y,$$

   ou seja,

   $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

   Assim, das condições acima verificadas, temos que $\mathbf{F}$ é um campo conservativo. Agora, vamos determinar f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$. Isto é, devemos encontrar f tal que

   $$f_x(x, y) = P(x, y) \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = Q(x, y).$$

   Como $f_x(x, y) = P(x, y)$ temos que

   $$f_x(x, y) = ye^x + \operatorname{sen} y \Rightarrow f(x, y) = ye^x + x \operatorname{sen} y + g(y) \tag{1}$$

   De (1) obtemos que

   $$f_y(x, y) = e^x + x\cos y + g'(y)$$

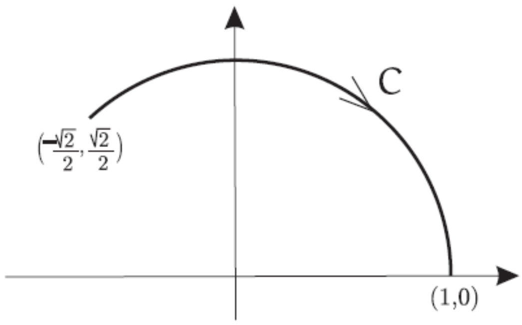
   Mas, $f_y(x, y) = Q(x, y)$ logo obtemos que

   $$e^x + x\cos y + g'(y) = e^x + x\cos y \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C.$$

   Portanto,

   $$f(x, y) = ye^x + x\operatorname{sen} y + C \quad \text{e} \quad \nabla f = \mathbf{F}.$$

2. ★ (Prova, 2008) Seja $\mathbf{F}(x,y) = (e^x \cos y + y, x - e^x \operatorname{sen} y)$. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é o arco de circunferência que une o ponto $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ ao ponto $(1,0)$. Veja a figura



Solução: Notemos que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo, pois

i) $\mathbf{F}$ é definido em todo $\mathbb{R}^2$;

ii) $P(x,y) = e^x \cos y + y$ e $Q(x,y) = x - e^x \operatorname{sen} y$ possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas;

iii) $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1 - e^x \operatorname{sen} y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$.

Sendo F conservativo, existe f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$. Vamos encontrar f. Temos que

$$f_x(x,y) = P(x,y) \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = Q(x,y).$$

Então,

$$f_x(x,y) = e^x \cos y + y \Rightarrow f(x,y) = e^x \cos y + y + g(y) \tag{2}$$

Logo, de (2) temos que

$$f_y(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y + x + g'(y).$$

Como $f_y(x,y) = Q(x,y)$, obtemos que

$$-e^x \operatorname{sen} y + x + g'(y) = x - e^x \operatorname{sen} y \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C.$$

Assim, tomando $C = 0$ segue que

$$f(x,y) = e^x \cos y + xy.$$

Do resultado acima e pelo Teorema Fundamental da Integral de Linha, temos que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(1,0) - f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

3. ♦ ([1], seção 16.3) Determine se o conjunto dado é ou não: (i)aberto; (ii) conexo e (iii) simplesmente conexo.

a) $\{(x, y) | \, x > 0, \; y > 0\}$

b) $\{(x, y) | \, x \neq 0\}$

c) $\{(x, y) | \, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

d) $\{(x, y) | \, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ou } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

Solução:

a) Temos que o conjunto $D = \{(x, y) | \, x > 0, \; y > 0\}$ representa o primeiro quadrante, excluindo os eixos. Então:

(i) D é aberto, pois em torno de cada ponto em D, podemos colocar um disco que se encontra em D.

(ii) D é conexo, pois o segmento de reta que une dois pontos quaisquer de D encontra-se em D.

(iii) D é simplesmente conexo, pois ele é conexo e não tem buracos.

b) Temos que o conjunto $D = \{(x, y) | \, x \neq 0\}$ consiste de todos os pontos, exceto para aqueles que encontram-se sobre o eixo y. Então:

(i) D é aberto.

(ii) Os pontos em lados opostos do eixo y não podem ser conectados por um caminho que se encontra totalmente em D, então D não é conexo.

(iii) D não é simplesmente conexo, pois não é conexo.

c) Temos que o conjunto $D = \{(x, y) | \, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ representa a região anelar entre os círculos com centro $(0, 0)$ e raio 1 e 2. Então:

(i) D é aberto pois, em torno de cada ponto em D, podemos colocar um disco que se encontra inteiramente em D.

(ii) D é conexo pois quaisquer dois pontos de D podem ser conectados por um caminho em D.

(iii) D não é simplesmente conexo pois, por exemplo, a região delimitada pela curva simples e fechada $x^2 + y^2 = (3/2)^2$ possui pontos que não estão em D, por exemplo, a origem $(0, 0)$.

d) Temos que o conjunto $D = \{(x, y) | \, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ou } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ consiste dos pontos que estão sobre ou dentro do círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ juntamente com os pontos que estão em ou entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$. Então:

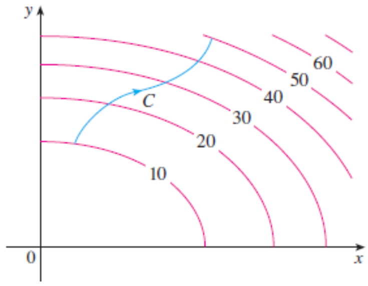
(i) D não é aberto pois qualquer disco centrado em $(0, 1)$ contém pontos que não estão em D.

(ii) D não é conexo pois não existe um caminho em D conectando, por exemplo, os pontos $(1, 0)$ e $(2, 0)$.

(iii) D não é simplesmente conexo porque possui um buraco. Com efeito, a região delimitada pela curva simples e fechada $x^2 + y^2 = (5/2)^2$, contém pontos que não pertencem a D, por exemplo, o ponto $(0, 3/2)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4. ([1], seção 16.3) A figura mostra uma curva C e um mapa de contorno de uma função f cujo gradiente é contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



5. ♦ ([2], seção 7.1) ([3], seção 13.3) ([1], seção 16.3) Determine se $\mathbf{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

   a) $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

   b) $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

   c) $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\,\mathbf{i} + (-3x + 4y - 8)\,\mathbf{j}$.

   d) $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$.

   e) $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (e^x \cos y)\,\mathbf{j}$.

   f) $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + 2xy^3)\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 + x/y)\,\mathbf{j}$.

   g) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)\,\mathbf{i} + (x + y + z)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$

   h) $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\,\mathbf{k}$

   i) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

   j) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \cos y)\,\mathbf{i} - (e^x \operatorname{sen} y)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

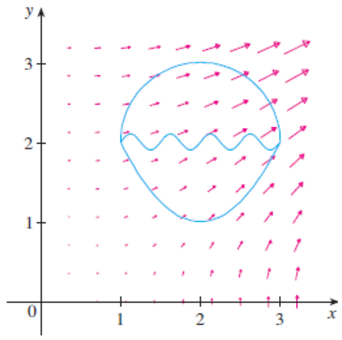
   l) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \operatorname{sen} z)\,\mathbf{i} + (x \operatorname{sen} z)\,\mathbf{j} + (xy \cos z)\,\mathbf{k}$

   m) $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k})$

6. ♦ ([1], seção 16.3) A figura mostra o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2)$ e três curvas que começam em $(1, 2)$ e terminam em $(3, 2)$.

   a) Explique por que $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tem o mesmo valor para as três curvas.

   b) Qual é esse valor comum?



7. ♦ ([1], seção 16.3) Em cada item abaixo: (i) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e (ii) use a parte (i) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre a curva C dada.

   a) $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, C é o arco da parábola $y = 2x^2$ de $(-1, 2)$ a $(2, 8)$.

   b) $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}$, $C : \mathbf{r}(t) = (t + \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t, t + \cos \frac{1}{2}\pi t)$, $0 \le t \le 1$.

   c) $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k}$, C é o segmento de reta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$.

   d) $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos z\,\mathbf{i} + 2xy \cos z\,\mathbf{j} - xy^2 \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$, $C : \mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi$.

   e) $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\,\mathbf{i} + xe^y\,\mathbf{j} + (z + 1)e^z\,\mathbf{k}$, $C : \mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

8. ([2], seção 7.3) Calcule

   a) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,2)} y\,dx + x\,dy$

   b) $\displaystyle\int_C y\,dx + x^2\,dy$, onde C é a curva cuja imagem é o segmento de extremidades $(1, 1)$ e $(2, 2)$, orientada de $(1, 1)$ para $(2, 2)$.

   c) $\displaystyle\int_{(-1,0)}^{(1,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y}{x^2 + y^2}\,dy$

   d) $\displaystyle\int_C (\operatorname{sen}(xy) + xy \cos(xy))\,dx + x^2 \cos(xy)\,dy$, onde $C(t) = (t^2 - 1, t^2 + 1)$, $-1 \le t \le 1$.

   e) $\displaystyle\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$, onde $C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva de classe C^1 por partes, com imagem contida no conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x < 0\}$, tal que $C(0) = (1, 1)$ e $C(1) = (-1, -1)$.

   f) $\displaystyle\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$ onde $C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva de classe C^1 por partes, com imagem contida no semiplano $y > 0$, tal que $C(0) = (1, 1)$ e $C(1) = (-2, 3)$.

9. ([3], seção 13.3) Calcule $\int_C 2x\cos y\,dx - x^2 \operatorname{sen} y\,dy$ ao longo dos caminhos C a seguir no plano xy.

a) A parabóla $y = (x-1)^2$ de $(1,0)$ a $(0,1)$.

b) O segmento de reta de $(-1,\pi)$ a $(1,0)$.

c) O eixo x de $(-1,0)$ a $(1,0)$.

d) O astróide $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\,\mathbf{i} + (\operatorname{sen}^3 t)\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, no sentido anti-horário de $(1,0)$ de volta a $(1,0)$.

10. (Prova, 2006) Considere o campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (e^z, 2yz, xe^z + y^2).$$

a) Verifique se o campo $\mathbf{F}$ é conservativo.

b) Se $\mathbf{F}$ for conservativo, calcule $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

c) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ onde C é dada por $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

11. (Prova, 2007) Calcule a integral de linha

$$\int_C e^{2y}\,dx + (1 + 2xe^{2y})\,dy,$$

onde C é a curva dada por $r(t) = (te^t, 1 + \operatorname{sen}(\pi t/2))$, $0 \le t \le 1$. (Sugestão: verifique se o campo é conservativo.)

12. (Prova, 2007) Calcule a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot r'(t)\,dt$$

onde $\mathbf{F} = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$ e C é a curva dada por $r(t) = (\operatorname{sen}^6 t, 1-\cos t, e^{t(t-\pi/2)})$, $0 \le t \le \pi/2$. (Dica: verifique se $\mathbf{F}$ é conservativo.)

13. (Prova, 2010) Seja

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} + 3y\right)$$

um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$. Calcule a integral de linha do campo $\mathbf{F}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, orientadas no sentido anti-horário, onde:

a) C_1 é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

b) C_2 é a fronteira do retângulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \le x \le \pi, -3 \le y \le 3\}$.

14. ◆ (Teste, 2013) Considere o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(e^x \ln(y) - \frac{e^y}{x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{e^x}{y} - e^y \ln(x)\right)\mathbf{j}.$$

a) O campo $\mathbf{F}$ é conservativo? Justifique sua resposta.

b) Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é qualquer caminho ligando o ponto $(1,1)$ ao ponto $(3,3)$.

15. ([2], seção 7.3) Seja $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínuo no aberto Ω. Prove que uma condição necessária para que $\mathbf{F}$ seja conservativo é que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva C fechada, de classe C^1 por partes, com imagem contida em Ω.

16. ★ ([2], seção 7.3) Seja $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, (x,y) \notin A\}$, onde A é a semirreta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, y = 0 \, e \, x \geq 0\}$. Calcule

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy,$$

onde $C : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva de classe C^1 por partes, com imagem contida em Ω, tal que $C(0) = (1,1)$ e $C(1) = (1,-1)$.

17. ([1], seção 16.3) Mostre que a integral de linha $\int_C 2x \,\mathrm{sen}\, y\, dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\, dy$, onde C é qualquer caminho entre $(-1,0)$ a $(5,1)$, é independente do caminho e calcule a integral.

18. ([3], seção 13.3) Suponha que $\mathbf{F} = \nabla f$ seja um campo vetorial conservativo e

$$g(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Mostre que $\nabla g = \mathbf{F}$.

19. ([1], seção 16.3) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x,y) = 2y^{3/2}\,\mathbf{i} + 3x\sqrt{y}\,\mathbf{j}$ ao mover um objeto de $P(1,1)$ a $Q(2,4)$.

20. (Teste, 2013) Considere o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y) = (\ln(y^2+1))\,\mathbf{i} + \left(\frac{2y(x-1)}{y^2+1}\right)\mathbf{j}.$$

a) Determine se F é ou não um campo conservativo.

b) Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial $\mathbf{F}$ ao mover uma partícula desde o ponto $(-1,1)$ até o ponto $(2,3)$.

21. (Teste, 2013) Considere o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y) = (1 + ye^{xy})\,\mathbf{i} + (2y + xe^{xy})\,\mathbf{j}.$$

a) Determine se $\mathbf{F}$ é ou não um campo conservativo. Em caso afirmativo, encontre uma função potencial para $\mathbf{F}$.

b) Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial $\mathbf{F}$ ao mover uma partícula sobre a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, desde o ponto $(3, -\sqrt{8})$ até o ponto $(3, \sqrt{8})$.

22. ([1], seção 16.3) Seja $\mathbf{F} = \nabla f$, onde $f(x, y) = \text{sen}(x - 2y)$. Determine curvas C_1 e C_2 que não sejam fechadas e satisfaçam a equação.

    a) $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ **b)** $\displaystyle\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1$

23. ([1], seção 16.3) Mostre que, se um campo vetorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é conservativo e P, Q, R têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

24. ([1], seção 16.3) Seja $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

    a) Mostre que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

    b) Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho. [Sugestão: calcule $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 e C_2 são as metades superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.] Isso contraria o Teorema 6 (Seção 16.3 do Livro do James Stewart)?

25. ([1], seção 16.3)

    a) Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial inverso do quadrado, ou seja,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

    para alguma constante c, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao mover um objeto de um ponto P_1 por um caminho para um ponto P_2 em termos da distância d_1 e d_2 desses pontos *à* origem.

    b) Um exemplo de um campo inverso do quadrado é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo gravitacional quando a Terra se move do afélio (em uma distância máxima de $1,52 \times 10^8\,km$ do Sol) ao periélio (em uma distância mínima de $1,47 \times 10^8\,km$). (Use os valores $m = 5,97 \times 10^{24}\,kg$, $M = 1,99 \times 10^{30}\,kg$ e $G = 6,67 \times 10^{-11}\,N \cdot m^2/kg^2$.)

c) Outro exemplo de campo inverso do quadrado é o campo elétrico $\mathbf{F} = \epsilon q Q \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$. Suponha que um elétron com carga de $-1,6 \times 10^{-19}\, C$ esteja localizado na origem. Uma carga positiva unitária é colocada *à* distância de $10^{-12}\, m$ do elétron e se move para uma posição que está *à* metade da distância original do elétron. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo elétrico. (Use o valor $\epsilon = 8,985 \times 10^9$.)

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4. 40.

5. **a)** Sim. $f(x,y) = xy + K$.

   b) Não.

   c) Sim. $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + K$.

   d) Não.

   e) Sim. $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y) + K$.

   f) Sim. $f(x,y) = x^2y + xy^{-2} + K$.

   g) Não.

   h) Sim. $f(x,y,z) = -\dfrac{1}{2(x^2+y^2+z^2)} + K$.

   i) Sim. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{2} + K$.

   j) Sim. $f(x,y,z) = e^x \cos(y) + \dfrac{z^2}{2} + K$.

   l) Sim. $f(x,y,z) = xy \operatorname{sen}(z) + K$.

   m) Sim. $f(x,y,z) = xe^{y+2z} + K$.

6. **a)** $\mathbf{F}$ é conservativo, logo $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ depende somente dos pontos inicial e final de C.

   b) 16.

7. **a)** (i) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{3}$; (ii) 171.

   b) (i) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2}$; (ii) 2.

   c) (i) $f(x,y,z) = xyz + z^2$; (ii) 77.

   d) (i) $f(x,y,z) = xy^2\cos(z)$; (ii) 0.

   e) (i) $f(x,y,z) = xe^y + ze^z$; (ii) $2e$.

8. **a)** 3.

   b) $\dfrac{23}{6}$.

   c) $\dfrac{\pi}{4} + \arctan\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

   d) 0.

   e) 0.

   f) π.

9. **a)** -1.

b) 2.

c) 0.

d) 0.

10. **a)** Sim.

    b) $f(x, y) = xe^z + y^2 z$.

    c) $e^{2\pi} - 1$.

11. $e^5 + 1$.

12. 1.

13. **a)** 0.

    b) 0.

14. **a)** Sim.

    b) 0.

15. Se C é uma curva fechada em Ω parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, com $a \leq t \leq b$, $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ e $\mathbf{F} = \nabla f$, então $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(a)) - f(\mathbf{r}(b)) = 0$.

16. $\dfrac{3\pi}{2}$.

17. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\,\mathrm{sen}(y)\mathbf{i} + x^2\cos(y) - 3y^2\mathbf{j}$ é um campo conservativo com uma função potencial $f(x, y) = x^2\,\mathrm{sen}(y) - y^3$; o valor da integral é $25\,\mathrm{sen}(1) - 1$.

18. Como $g(x, y, z) = f(x, y, z) - f(0, 0, 0)$, segue que $\nabla g = \nabla f = \mathbf{F}$.

19. 30.

20. **a)** Sim.

    b) $\ln(10) + 2\ln(2)$.

21. **a)** Sim. Função potencial: $f(x, y) = x + e^{xy} + y^2$.

    b) $e^{3\sqrt{8}} - e^{-3\sqrt{8}}$.

22. **a)** $\mathbf{r}(t) = \pi t\mathbf{i} + \pi t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$.

    b) $\mathbf{r}(t) = \dfrac{\pi}{2}t\mathbf{i}$, $0 \leq t \leq 1$.

23. Se f é uma função potencial de $\mathbf{F}$, então $f_x = P$, $f_y = Q$ e $f_z = R$. Como P, Q e R possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então pelo Teorema de Clairault, temos $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{yz} = f_{zy}$ e $f_{xz} = f_{zx}$.

24. **a)** $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

b) Tome C_1 a curva parametrizada por $\mathbf{r_1}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $0 \leq t \leq \pi$ e C_2 a curva parametrizada por $\mathbf{r_2}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, de $t = 2\pi$ a $t = \pi$. Segue que $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pi \neq -\pi = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Como o domínio de $\mathbf{F}$ é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ que não é simplesmente conexo, o resultado não contradiz o Teorema 6.

25. **a)** $c\left(\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}\right)$.

b) $\approx 1,77 \times 10^{35}$ J.

c) $\approx 1,4 \times 10^{4}$ J.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 3, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.

[4] C. H. Edwards Jr; D. E. Penney. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 2 e 3, Prentice Hall do Brasil, 1997.

[5] E. W. Swokowski. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2^a Edição, Markron Books, 1995.