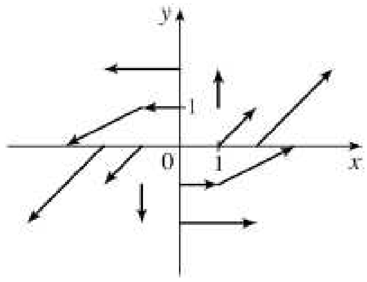
MA211 - Lista 10

Campos Vetoriais e Integrais de Linha

15 de novembro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ★ ([1], seção 16.1) Esboce o campo vetorial $\mathbf{F}(x,y) = (x-y)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, desenhando um diagrama.
Solução: Temos que o comprimento do vetor $(x-y)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ é $\sqrt{(x-y)^2 + x^2}$. Logo, os vetores ao longo da reta $y = x$ são verticais. Um esboço do campo vetorial $\mathbf{F}$ é dado na figura abaixo:



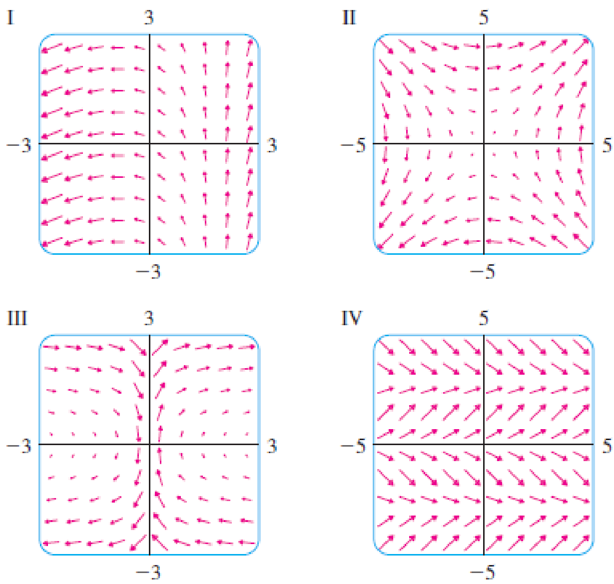
2. ⧫ ([1], seção 16.1) Faça a correspondência entre o campo vetorial $\mathbf{F}$ e a figura rotulada de I-IV. Justifique suas escolhas.

a) $\mathbf{F}(x,y) = (y,x)$

b) ★ $\mathbf{F}(x,y) = (1, \operatorname{sen} y)$

c) $\mathbf{F}(x,y) = (x-2, x+1)$

d) $\mathbf{F}(x,y) = \left(y, \dfrac{1}{x}\right)$



Solução:

a) $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$ corresponde ao gráfico II. No primeiro quadrante todos os vetores possuem componentes x e y positivas, no segundo quadrante todos os vetores possuem componente x positiva e componente y negativa, no terceiro quadrante todos os vetores possuem componentes x e y negativas e no quarto quadrante todos os vetores possuem componente x negativa e componente y positiva. Além disso, os vetores ficam mais curtos à medida que se aproximam da origem.

b) $\mathbf{F}(x, y) = (1, \operatorname{sen} y)$ corresponde ao gráfico IV uma vez que a componente x de cada vetor é constante, os vetores são independentes de x (vetores ao longo das retas horizontais são idênticos) e o campo vetorial parece repetir o mesmo padrão verticalmente.

c) $\mathbf{F}(x, y) = (x-2, x+1)$ corresponde ao gráfico I uma vez que os vetores são independentes de y (vetores ao longo das retas verticais são idênticos) e a medida que avançamos para a direita, ambas componentes x e y ficam maiores.

d) $\mathbf{F}(x, y) = (y, 1/x)$ corresponde ao gráfico III. Como no item (a), todos os vetores no primeiro quadrante possuem componentes x e y positivas, no segundo quadrante todos os vetores possuem componente x positiva e componente y negativa, no terceiro quadrante todos os vetores possuem componentes x e y negativas e no quarto quadrante todos os vetores possuem componente x negativa e componente y positiva. Também, todos os vetores tornam-se maiores à medida que se aproximam do eixo y.

3. ([1], seção 16.2) ([2], seção 6.2) Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

a) ★ $\displaystyle\int_C x\,dx - y\,dy$, C é o segmento de extremidades $(1, 1)$ e $(2, 3)$, percorrido no sentido de $(1, 1)$ para $(2, 3)$.

b) ★ $\displaystyle\int_C x^2 y\sqrt{z}\,dz$, $C:\ x = t^3,\ y = t,\ z = t^2,\ 0 \le t \le 1.$

Solução:

a) Uma representação paramétrica para o segmento de reta C é

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t \end{aligned} \qquad 0 \le t \le 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} dx &= dt \\ dy &= 2\,dt \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_C x\,dx - y\,dy = \int_0^1 (1+t)\cdot(dt) + (1+2t)\cdot(2\,dt) = \int_0^1 (1+t+2+4t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (3+5t)\,dt = \left(3t + \frac{5}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = 3 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}.$$

b) As equações paramétricas de C são

$$x = t^3,\ y = t,\ z = t^2,\ 0 \leq t \leq 1.$$

Logo,

$$dx = 3t^2\,dt,\ dy = dt,\ dz = 2t\,dt.$$

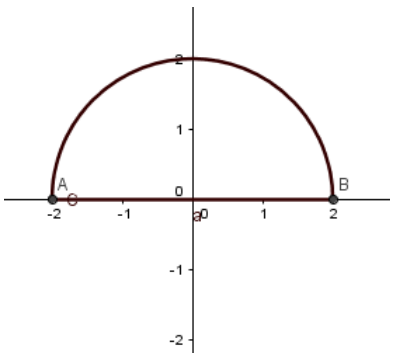
Assim,

$$\int_C x^2 y\sqrt{z}\,dz = \int_0^1 ((t^3)^2 \cdot t \cdot \sqrt{t^2})(2t\,dt) = 2\int_0^1 t^9\,dt$$

$$= 2 \cdot \frac{t^{10}}{10}\Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$

4. ★ (Prova, 2014) Determine o trabalho $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado pelo campo de força
$\mathbf{F}(x,y) = x\,\mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2)\,\mathbf{j}$ em uma partícula que inicialmente está no ponto $(-2,0)$, se move ao longo do eixo x para $(2,0)$ e ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial.

Solução: A curva C é apresentada na figura abaixo:



Então uma parametrização para C é

$$x = 2\cos t, \qquad y = 2\,\mathrm{sen}\,t, \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

Temos que o trabalho é dado por

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt.$$

Assim,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (2\cos t,\ 8\cos^3 t + 24\cos t\ \mathrm{sen}^2\, t)$$

e

$$\mathbf{r}'(t) = (-2\ \mathrm{sen}\, t,\ 2\cos t)$$

Então

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{\pi} (-4\ \mathrm{sen}\, t\ \cos t + 16\cos^4 t + 48\cos^2 t\ \mathrm{sen}^2\, t)\, dt \\
&= -4\underbrace{\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\, t\ \cos t\, dt}_{\substack{u=\mathrm{sen}\, t \\ du=\cos dt}} + 16\int_0^{\pi} \cos^4 t\, dt + 48\int_0^{\pi} \cos^2 t\ \mathrm{sen}^2\, t\, dt \\
&= -4\int_0^0 u\, du + 16\left(\frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2t) + \frac{1}{32}\,\mathrm{sen}(4t)\right)\Bigg|_0^{\pi} + 48\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^3\, t\ \cos t + \frac{1}{8}t - \frac{1}{16}\,\mathrm{sen}(2t)\right)\Bigg|_0^{\pi} \\
&= 0 + 16\cdot\frac{3}{8}\pi + 48\cdot\frac{\pi}{8} = 6\pi + 6\pi = 12\pi
\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ♦ ([1], seção 16.1) Esboce o campo vetorial $\mathbf{F}$, desenhando um diagrama.

   a) $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ **b)** $\mathbf{F}(x,y) = y\,\mathbf{i}+\dfrac{1}{2}\,\mathbf{j}$

   c) $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{y\,\mathbf{i}-x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **d)** $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{y\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

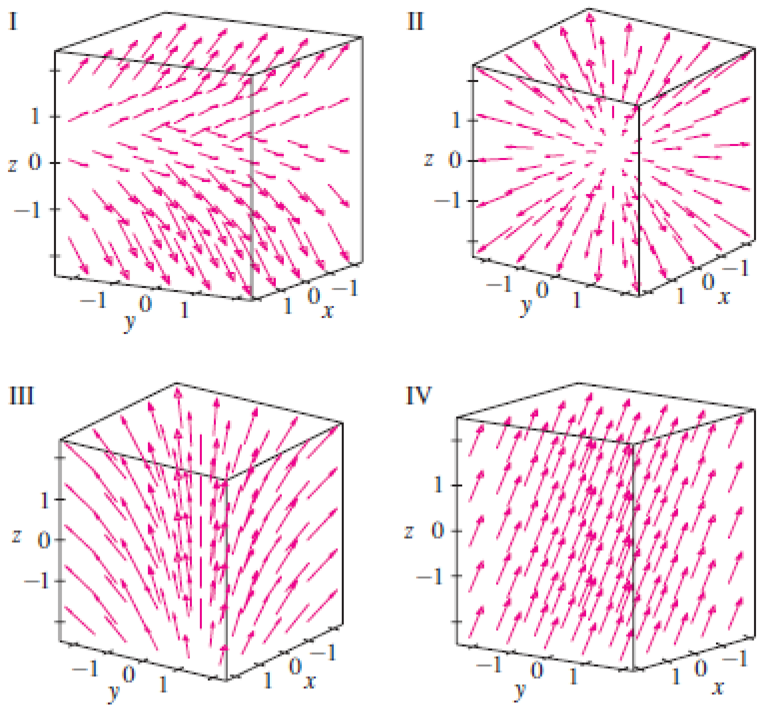
6. ([1], seção 16.1) Determine o campo vetorial gradiente de f.

   a) $f(x,y) = \ln(x+2y)$ b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

7. ♦ ([1], seção 16.1) Faça a correspondência entre o campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ e a figura rotulada de I-IV. Justifique suas escolhas.

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{k}$ **b)** $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$

   c) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{k}$ **d)** $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$



8. ([1], seção 16.1) Determine o campo vetorial gradiente ∇f de f e o esboce.

   a) $f(x,y) = x^2 - y$ **b)** $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

9. ([3], seção 13.2) Encontre um campo de vetores $\mathbf{G} = P(x,y)\,\mathbf{i}+Q(x,y)\,\mathbf{j}$ no plano xy com a propriedade de que, em qualquer ponto $(a,b) \neq (0,0)$, $\mathbf{G}$ é um vetor de magnitude $\sqrt{x^2+y^2}$ tangente à circunferência $x^2+y^2 = a^2+b^2$ e aponta no sentido horário. (O campo é indefinido em (0,0).)

10. ([1], seção 16.1) Uma partícula se move em um campo de velocidade $\mathbf{V}(x, y) = (x^2, x+y^2)$. Se ela está na posição $(2, 1)$ no instante $t = 3$, estime sua posição no instante $t = 3,01$.

11. ([1], seção 16.1) As **linhas de escoamento** (ou **linhas de corrente**) de um campo vetorial são as trajetórias seguidas por uma partícula cujo campo de velocidade é um campo vetorial dado. Assim, os vetores do campo vetorial são tangentes a suas linhas de escoamento.

    a) Use um esboço do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ para desenhar algumas linhas de escoamento. Desses seus esboços é possível descobrir qual é a equação das linhas de escoamento?

    b) Se as equações paramétricas de uma linha de escoamento são $x = x(t)$ e $y = y(t)$, explique por que essas funções satisfazem as equações diferenciais $dx/dt = x$ e $dy/dt = -y$. Resolva então as equações de forma a obter uma equação da linha de escoamento que passe pelo ponto $(1, 1)$.

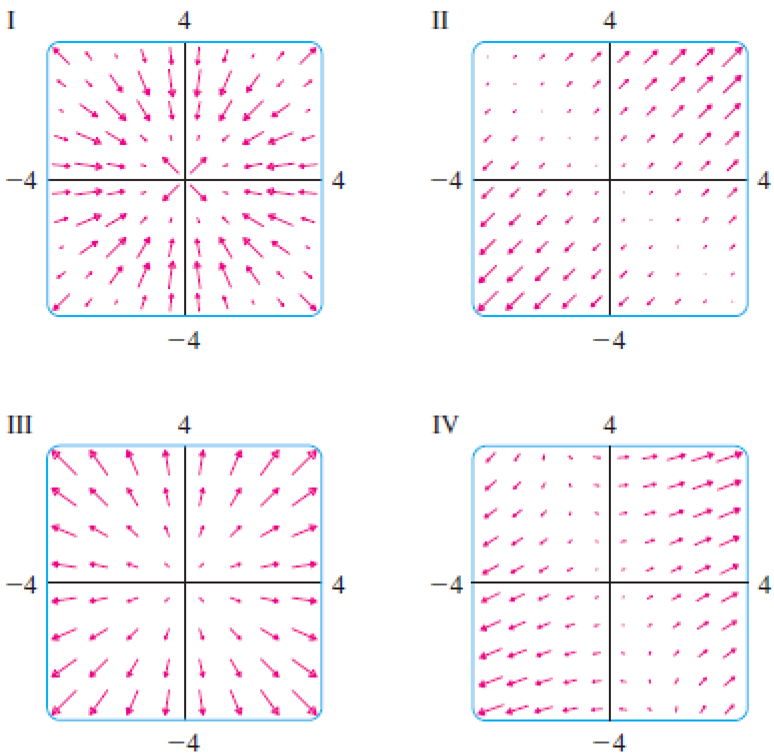
12. ([1], seção 16.1) Faça uma correspondência entre as funções f e os desenhos de seus campos vetoriais gradientes (rotulados de I-IV). Justifique.

    a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

    b) $f(x, y) = x(x + y)$

    c) $f(x, y) = (x + y)^2$

    c) $f(x, y) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$



13. ([1], seção 16.1)

a) Esboce o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ e algumas linhas de escoamento. Qual é o formato que essas linhas de escoamento parecem ter?

b) Se as equações paramétricas das linhas de escoamento são $x = x(t)$ e $y = y(t)$, que equações diferenciais essas funções satisfazem? Deduza que $dy/dx = x$.

c) Se uma partícula está na origem no instante inicial e o campo de velocidade é dado por $\mathbf{F}$, determine uma equação para a trajetória percorrida por ela.

14. ♦ ([1], seção 16.2) ([2], seção 6.2) (Prova, 2013) Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

a) $\displaystyle\int_C y^3\, ds, \quad C: \, x = t^3, \, y = t, \, 0 \le t \le 2.$

b) $\displaystyle\int_C xy^4\, ds, \quad C$ é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.

c) $\displaystyle\int_C x \operatorname{sen} y\, ds, \quad C$ é o segmento de reta que liga $(0, 3)$ a $(4, 6)$.

d) ★ $\displaystyle\int_C x\, dx - y\, dy, \quad C$ é o segmento de extremidades $(1, 1)$ e $(2, 3)$, percorrido no sentido de $(1, 1)$ para $(2, 3)$.

e) $\displaystyle\int_C (x^2y^3 - \sqrt{x})\, dy, \quad C$ é o arco da curva $y = \sqrt{x}$ de $(1, 1)$ a $(4, 2)$.

f) $\displaystyle\int_C xy\, dx + (x - y)\, dy, \quad C$ consiste nos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$.

g) $\displaystyle\int_C x\, dx + y\, dy, \quad C: \, x = t^2, \, y = \operatorname{sen} t, \, 0 \le t \le \pi/2.$

h) $\displaystyle\int_C xy^3\, ds, \quad C: \, x = 4 \operatorname{sen} t, \, y = 4 \cos t, \, z = 3t, \, 0 \le t \le \pi/2.$

i) $\displaystyle\int_C xe^{yz}\, ds, \quad C$ é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.

j) $\displaystyle\int_C x\, dx + y\, dy + z\, dz$, C é o segmento de extremidades $(0, 0, 0)$ e $(1, 2, 1)$, percorrido no sentido de $(1, 2, 1)$ para $(0, 0, 0)$.

l) $\displaystyle\int_C (2x + 9z)\, ds, \quad C: \, x = t, \, y = t^2, \, z = t^3, \, 0 \le t \le 1.$

m) $\displaystyle\int_C xyz\, ds$, onde C é a hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3t)$, $0 \le t \le 4\pi$.

n) ★ $\displaystyle\int_C x^2y\sqrt{z}\, dz, \quad C: \, x = t^3, \, y = t, \, z = t^2, \, 0 \le t \le 1.$

o) $\displaystyle\int_C (x + yz)\, dx + 2x\, dy + xyz\, dz, \quad C$ consiste nos segmentos de reta de $(1, 0, 1)$ a $(2, 3, 1)$ e de $(2, 3, 1)$ a $(2, 5, 2)$.

p) $\displaystyle\int_C x\,dx + dy + 2\,dz$, C é a interseção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o plano $z = 2x + 2y - 1$; caminhe no sentido anti-horário.

q) $\displaystyle\int_C dx + xy\,dy + z\,dz$, C é a interseção de $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, com o plano $y = x$; o sentido de percurso é do ponto $(0, 0, \sqrt{2})$ para $(1, 1, 0)$.

r) $\displaystyle\int_C 2\,dx - dy$, C tem por imagem $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$; sentido de percurso é de $(2, 0)$ para $(0, 2)$.

s) $\displaystyle\int_C \frac{-y}{4x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{4x^2 + y^2}\,dy$, C tem por imagem a elipse $4x^2 + y^2 = 9$ e o sentido de percurso é o anti-horário.

15. ♦ ([1], seção 16.2)([2], seção 6.1) (Prova, 2010) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

a) $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}(t) = 11t^4\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\,\mathbf{i} + (y - z)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

c) $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

d) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

e) ★ $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y + z)\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = (t, t, -t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

f) $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}(t) = (t^2, 3)$, $-1 \leq t \leq 1$.

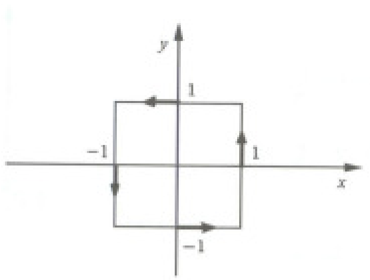
g) $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + (x - y)\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}(t) = (t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

h) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

i) $\mathbf{F}(x, y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \operatorname{sen} y)$, $\mathbf{r}(t) = (t, \operatorname{tg} t)$, $0 \leq t \leq \pi/4$.

16. ♦ ([2], seção 6.4) (Prova, 2010,2013) Calcule as integrais de linha.

a) ★ $\displaystyle\int_C \sqrt[3]{x}\,dx + \frac{dy}{1 + y^2}$, onde C é a curva



b) $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = (x + y^2)\,\mathbf{j}$ e C é a curva do item (a).

c) $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy + 2y)$ e C é o segmento de reta que liga o ponto $(1, 0, 1)$ ao ponto $(-2, 2, 2)$.

d) $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x,y) = (y, 3x)$ e C é a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, percorrida no sentido anti-horário.

e) $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, 2xz, xy + 2z)$ e C é o segmento de reta que liga o ponto $(1,0,1)$ ao ponto $(-2,2,2)$.

f) $\displaystyle\int_C (x-y)\,dx + e^{x+y}\,dy$, onde C é a fronteira do triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,2)$, orientada no sentido anti-horário.

g) $\displaystyle\int_C dx + dy$, onde C é a poligonal de vértices $A_0 = (0,0)$, $A_1 = (1,2)$, $A_2 = (-1,3)$, $A_3 = (-2,1)$ e $A_4 = (-1,-1)$, sendo C orientada de A_0 para A_4.

h) $\displaystyle\int_C y^2\,dx + x\,dy - dz$, onde C é a poligonal de vértices $A_0 = (0,0,0)$, $A_1 = (1,1,1)$, $A_2 = (1,1,0)$, orientada de A_0 para A_2.

i) $\displaystyle\int_C x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$, onde C é a curva do item (e).

17. ([2], seção 6.4) Verifique que

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

onde B é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, C é a fronteira de B orientada no sentido anti-horário, $P(x,y) = x^2 - y$ e $Q(x,y) = x^2 + y$.

18. ([1], seção 16.2) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x,y) = e^{x-1}\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ e C é dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$.

19. ([2], seção 6.2) Seja $C : \mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ $(R > 0)$. Mostre que

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

não depende de R.

20. ([5], seção 18.2) Calcule $\int_C (x+y+z)\,dx + (x-2y+3z)\,dy + (2x+y-z)\,dz$, onde C é a curva de $(0,0,0)$ a $(2,3,4)$ se

a) C consiste em três segmentos de reta, o primeiro paralelo ao eixo x, o segundo paralelo ao eixo y e o terceiro paralelo ao eixo z.

b) C consite em três segmentos de reta, o primeiro paralelo ao eixo z, o segundo ao eixo x e o terceiro paralelo ao eixo y.

c) C é um segmento retilíneo.

21. ♦ ([2], seção 6.1) Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo tal que, para todo (x,y), $\mathbf{F}(x,y)$ é paralelo ao vetor $x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva de classe C^1, cuja imagem está contida na circunferência de centro na origem e raio $r > 0$. Interprete geometricamente.

22. ([1], seção 16.2) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ no sentido anti-horário.

23. (Prova, 2014) Determine o trabalho $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2(x - y)\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$ em uma partícula que se move da origem ao longo do eixo x para $(1, 0)$, em seguida ao longo de um segmento de arco de circunferência $x^2 + y^2 = 1$ até $(0, 1)$ e então volta à origem ao longo do eixo y.

24. ♦ (Prova, 2006) Calcule o trabalho realizado por uma partícula andando sobre a espiral dada por $C : x = t\cos t,\ y = t\,\mathrm{sen}\,t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, sob a ação do campo $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$, ou seja, calcule a integral $\int_C x\,dx + y\,dy$.

25. (Prova, 2014) Calcule o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo da reta $y = x$ até $(1, 1)$ e então de volta à origem ao longo da curva $y = x^2$.

26. ([2], seção 6.1) Uma partícula move-se no plano de modo que no instante t sua posição é dada por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\,\mathbf{i} + (x - y)\,\mathbf{j}$ no deslocamento da partícula de $\mathbf{r}(0)$ até $\mathbf{r}(1)$.

27. ([2], seção 6.1) Uma partícula desloca-se em um campo de forças dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Calcule o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ no deslocamento da partícula de $\mathbf{r}(a)$ até $\mathbf{r}(b)$, sendo dados:

    a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t)$, $a = 0$ e $b = 2\pi$.

    b) $\mathbf{r}(t) = (2t + 1, t - 1, t)$, $a = 1$ e $b = 2$.

    c) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, 0, \mathrm{sen}\,t)$, $a = 0$ e $b = 2\pi$.

28. ★ (Prova, 2010) Sejam $A = (3, 0)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 3)$ pontos de $\mathbb{R}^2$ e C a trajetória que vai em linha reta de A até B e em seguida de B até C. Determine o trabalho ao longo de C do campo de forças $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sendo

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

29. ([1], seção 16.2) Um arame fino é entortado no formato da semicircunferência $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$. Se a densidade linear for uma constante k, determine a massa e o centro de massa do arame.

30. ([1], seção 16.2) Se um arame com densidade linear $\rho(x, y)$ está sobre uma curva plana C, seus **momentos de inércia** em relação aos eixos x e y são definidos por

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y)\,ds \qquad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y)\,ds.$$

Determine os momentos de inércia de um arame com o formato de um semicírculo $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, que é mais grosso perto da base do que perto do topo, se a função densidade linear em qualquer ponto for proporcional à sua distância à reta $y = 1$.

31. ([1], seção 16.2) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + (y+2)\,\mathbf{j}$ sobre um objeto que se move sobre um arco de cicloide $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

32. ⧫ ([5], seção 18.2) A força em um ponto (x, y) de um plano coordenado é $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$. Ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}(x, y)$ ao longo do gráfico de $y = x^3$ de $(0, 0)$ a $(2, 8)$.

33. ([5], seção 18.2) A força em um ponto (x, y, z) em três dimensões é dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$. Ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}(x, y, z)$ ao longo da cúbica reversa $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ de $(0, 0, 0)$ a $(2, 4, 8)$.

34. ([1], seção 16.2) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y, z) = (y+z)\,\mathbf{i} + (x+z)\,\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}$ sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta $(1, 0, 0)$ a $(3, 4, 2)$.

35. ([1], seção 16.2) Um homem pesando 160 lb carrega uma lata de tinta de 25 lb por uma escada helicoidal em torno de um silo com raio de 20 pés. Se o silo tem 90 pés de altura e o homem dá três voltas completas em torno do silo, quanto trabalho é realizado pelo homem contra a gravidade para subir ao topo?

36. ([1], seção 16.2) Suponha que exista um furo na lata de tinta do exercício anterior, sendo que 9 lb de tinta vazam da lata de modo contínuo e uniforme durante a subida do homem. Quanto trabalho é realizado?

37. ([1], seção 16.2)

   a) Mostre que um campo de força constante realiza trabalho nulo sobre um partícula que dá uma única volta completa uniformemente na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

   b) Isso também é verdadeiro para um campo de força $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$, onde k é uma constante e $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$?

38. ([2], seção 6.1) Calcule $\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$, onde $\mathbf{E}(x, y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}\dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $C : \mathbf{r}(t) = (t, 1)$,
$-1 \leq t \leq 1$. (O $\mathbf{l}$ desempenha aqui o mesmo papel que $\mathbf{r} : \mathbf{l}(t) = \mathbf{r}(t)$.)

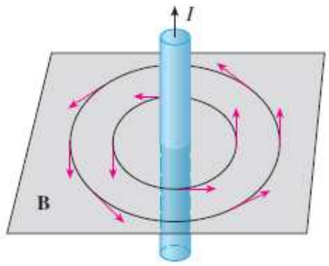
39. ([1], seção 16.2) Experiências mostram que uma corrente contínua I em um fio comprido produz um campo magnético $\mathbf{B}$ que é tangente a qualquer círculo em um plano perpendicular ao fio cujo centro seja o eixo do fio (como na figura). A *Lei de Ampère* relaciona a corrente elétrica ao campo magnético criado e afirma que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I,$$

onde I é a corrente total que passa por qualquer superfície limitada por uma curva fechada C e μ_0 é uma constante, chamada permeabilidade no vácuo.

Tomando C como um círculo de raio r, mostre que o módulo $B = |\mathbf{B}|$ do campo magnético a uma distância r do centro do fio é dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$



40. ([2], seção 6.1) Seja $\mathbf{E}$ o campo do exercício 38 e seja C a curva dada por $x = t$ e $y = 1 - t^4$, $-1 \leq t \leq 1$.

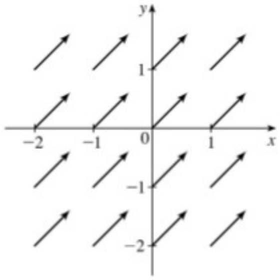
a) Que valor é razoável esperar para $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$? Por quê?

b) Calcule $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$.

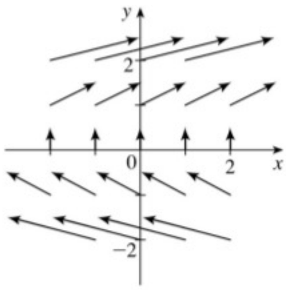
41. ([2], seção 6.1) Calcule $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, onde $\mathbf{E}(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2} \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e C é a curva dada por $x = 2\cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

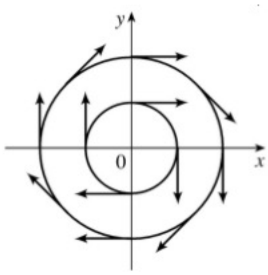
5. **a)** .



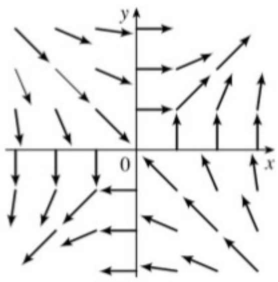
b) .



c) .



d) .



6. **a)** $\nabla f(x, y) = \dfrac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}{x + 2y}$.

b) $\nabla f(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

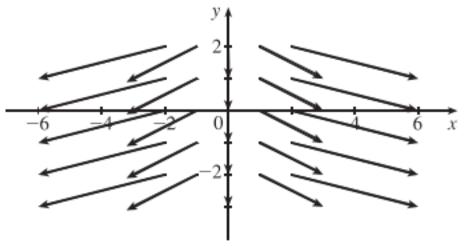
7. **a)** IV.

b) I.

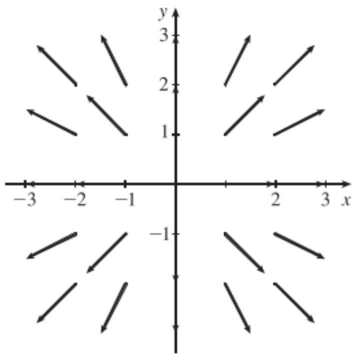
c) III.

d) II.

8. **a)** $\nabla f(x,y) = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j}$;



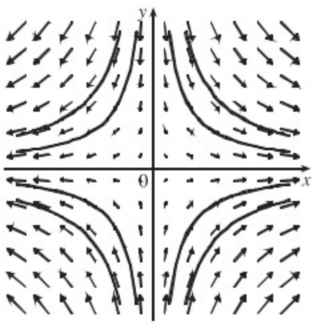
b) $\nabla f(x,y) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;



9. $\mathbf{G} = \dfrac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

10. $(2,04; 1,03)$.

11. **a)** As linhas de fluxo se aproximam de hipérboles $y = \dfrac{C}{x}$:



b) $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

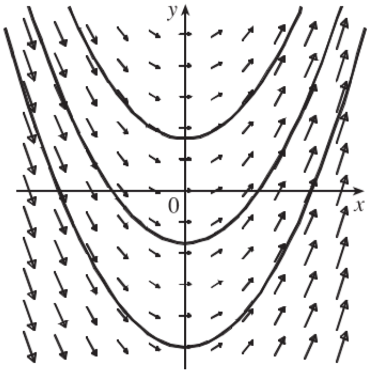
12. **a)** III.

b) IV.

c) II.

d) I.

13. **a)** As linhas de fluxo parecem parábolas:



b) Note que como os vetores velocidade coincidem com os vetores no campo vetorial, temos $x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$, de onde $x'(t) = 1$, $y'(t) = x$. Segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x'(t)}{y'(t)} = x.$$

c) $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

14. **a)** $\dfrac{1}{54}\left(145^{3/2} - 1\right)$.

b) $\dfrac{2^{13}}{5}$.

c) $\dfrac{20}{6}\left(\sin(6) - 3\cos(6) - \sin(3)\right)$.

d) $-\dfrac{5}{2}$.

e) $\dfrac{243}{8}$.

f) $\dfrac{17}{3}$.

g) $\dfrac{\pi^4}{32} + \dfrac{1}{2}$.

h) 320.

i) $\dfrac{\sqrt{14}}{12}\left(e^6 - 1\right)$.

j) -3.

l) $\dfrac{1}{6}\left(14^{3/2} - 1\right)$.

m) $-3\sqrt{10}\pi$.

n) $\dfrac{1}{5}$.

o) $\dfrac{97}{3}$.

p) 0.

q) $\dfrac{1}{3}$.

r) -6.

s) π.

15. **a)** 45.

    b) $\dfrac{17}{15}$.

    c) $\dfrac{6}{5} - \cos(1) - \sin(1)$.

    d) $2\pi^2$.

    e) $-\dfrac{11}{6}$.

    f) 0.

    g) $\dfrac{\pi^3}{3} - 2$.

    h) $\dfrac{8\pi^3}{3}$.

    i) $\cos(1) - \dfrac{\pi}{4}e^{-1} - \dfrac{\pi^2}{16} - 1$.

16. **a)** 0.

    b) 4.

    c) -6.

    d) $-2\pi ab$.

    e) -7.

    f) $\dfrac{e^3}{6} - \dfrac{e}{2} + \dfrac{5}{6}$.

    g) -2.

    h) $\dfrac{5}{6}$.

    i) $\dfrac{2}{3}$.

17. $\displaystyle\int_C P\,dx + Q\,dy = \frac{7}{6} = \iint\limits_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$

18. $\dfrac{11}{8} - \dfrac{1}{e}$.

19. Note que o valor da integral é 2π, independente de R.

20. **a)** 19.

    b) 35.

    c) 27.

21. 0.

22. 0.

23. $\frac{\pi}{8}$.

24. $2\pi^2$.

25. $\frac{1}{12}$.

26. 1.

27. **a)** $2\pi(1+\pi)$.

    b) $\frac{9}{2}$.

    c) 0.

28. $2\arctan(2) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

29. Massa: $k2\pi$; centro de massa: $\left(\frac{4}{\pi}, 0\right)$.

30. $I_x = k\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\right)$ e $I_y = k\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

31. $2\pi^2$.

32. $\frac{1592}{21}$.

33. $\frac{412}{15}$.

34. 26.

35. 16650 ft-lb.

36. 16245 ft-lb.

37. **a)** Dica: tome a parametrização do círculo C dada por $x = cos(t)$ e $y = \sin(t)$, com $t \in [0, 2\pi]$ e considere um campo constante arbitrário $\mathbf{F} = (a, b)$. Segue que $W = \int_C F \cdot d\mathbf{r} = 0$.

    b) Sim. Realize o mesmo cálculo com $\mathbf{F}(x, y) = (kx, ky)$.

38. 0.

39. Note que $\mathbf{B}$ é tangente a qualquer círculo que está no plano perpendicular ao fio. Logo, $\mathbf{B} = |\mathbf{B}|\mathbf{T}$, onde $\mathbf{T}$ é a tangente unitária ao círculo $\mathbf{C}$ parametrizado por $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. Daí, $\mathbf{B} = |\mathbf{B}|\,(-\sin(\theta), \cos(\theta))$ e

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} |\mathbf{B}|\,(-\sin(\theta), \cos(\theta)) \cdot ((-r\sin(\theta), r\cos(\theta))\ d\theta = 2\pi r|\mathbf{B}|.$$

40. 0.

41. $-\frac{1}{2}$.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 3, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.

[4] C. H. Edwards Jr; D. E. Penney. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 2 e 3, Prentice Hall do Brasil, 1997.

[5] E. W. Swokowski. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2^a Edição, Markron Books, 1995.