MA211 - Lista 02

Funções de Várias Variáveis, Limite e Continuidade

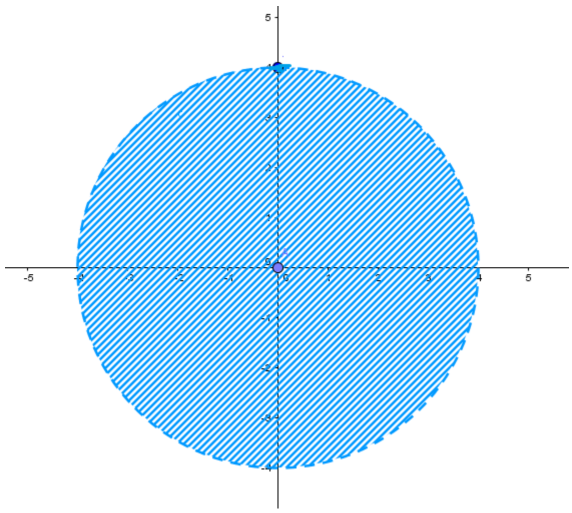
8 de setembro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ([3], seção 11.1) Dada $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$. (i) Encontre o domínio da função; (ii) Encontre a imagem da função; (iii) Descreva as curvas de nível da função.

Solução: (i) O domínio de f é

$$D = \{(x,y)|\, 16 - x^2 - y^2 > 0\} = \{(x,y)|\, x^2 + y^2 < 16\}.$$



(ii) A imagem de f é

$$\left\{ z|\, z = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}},\ (x,y) \in D \right\}.$$

Mas,

$$z = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}.$$

Assim, a imagem de f é $\left\{ z|\, z \geq \dfrac{1}{4} \right\}$.

(iii) As curvas de níveis de f são da forma $f(x,y) = c$, isto é,

$$\frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}} = c \Leftrightarrow \sqrt{16-x^2-y^2} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow 16-x^2-y^2 = \frac{1}{c^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 16-\frac{1}{c^2}.$$

Assim, as curvas de níveis de f são circunferências com centro na origem e raio menor do que 4.

2. ⧫ (Teste, 2013) Considere a função

$$f(x,y) = \sqrt{x+y^2-3}$$

a) Faça um esboço das curvas de nível de f nos níveis $c=0$, $c=1$ e $c=3$.

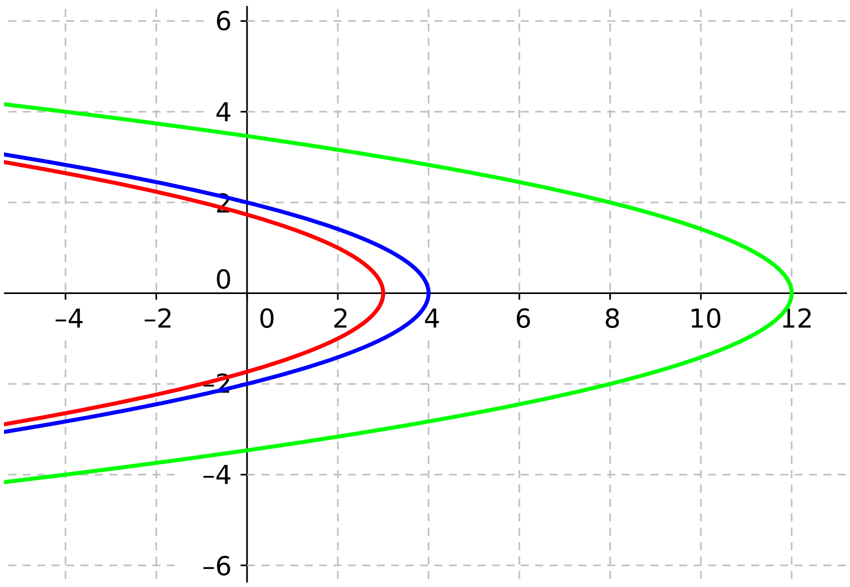
b) Quantas curvas de nível de f passam pelo ponto $(3,-1)$?

Solução:

a) As curvas de níveis de f são

$$\sqrt{x+y^2-3} = c \quad \text{ou} \quad x+y^2-3 = c^2 \quad \text{ou} \quad x = 3+c^2-y^2,$$

ou seja, uma família de parábolas com concavidade para a esquerda. As três curvas de níveis pedidas, obtidas considerando respectivamente $c=0$, $c=1$ e $c=3$, são $x=3-y^2$, $x=4-y^2$ e $x=12-y^2$. Elas estão apresentadas na figura abaixo.



b) Pelo ponto $(3,-1)$ passa uma única curva de nível, isto é, $f(x,y)=1$. Pois caso contrário o ponto $(3,-1)$ teria duas alturas diferentes, o que é impossível.

3. ♦ ([2], seção 9.1) Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Solução: Considere $t = x^2 + y^2$.

Assim , se $(x,y) \to (0,0)$ temos que $t \to 0$. Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

4. ♦ ([2], seção 9.2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ é contínua em (0,0)? Justifique.

Solução: Notemos que para $(x,y) \neq (0,0)$ a função f é contínua, pois xy^2 e x^2+y^2 são funções contínuas e $x^2+y^2 \neq 0$. Agora, estudemos a continuidade da função f no ponto $(0,0)$. Temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0 \quad \text{e} \quad \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1, \; \forall (x,y) \neq (0,0),$$

obtemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Portanto, f é contínua em $(0,0)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ([1], seção 14.1) O *índice I de temperatura-umidade* (ou simplesmente *humidex*) é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que podemos escrever $I = f(T,h)$. A tabela seguinte com valores de I foi extraída de uma tabela do Environment Canada.

   a) Qual é o valor de $f(35,60)$? Qual é o seu significado?

   b) Para que valor de h temos $f(30,h) = 36$?

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C) — T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

Figura 1: Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?

d) Qual o significado de $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h.

6. ([1], seção 14.1) Verifique que, para a função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$

discutida no Exemplo 3 da Seção 14.1 do Stewart, a produção dobrará se as quantidades de trabalho e a de capital investido forem dobradas. Determine se isto também é verdade para uma função de produção genérica

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}.$$

7. ([1], seção 14.1) Seja $f(x, y) = x^2e^{3xy}$.

a) Calcule $f(2, 0)$.

b) Determine o domínio de f.

c) Determine a imagem de f.

8. ([1], seção 14.1) Seja $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$.

a) Calcule $f(2, -1, 6)$.

b) Determine o domínio de f.

c) Determine a imagem de f.

9. ([1], seção 14.1) Seja $g(x, y, z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.

a) Calcule $g(2, -2, 4)$.

b) Determine o domínio de g.

c) Determine a imagem de g.

10. ([1], seção 14.1) Determine e faça o esboço do domínio da função.

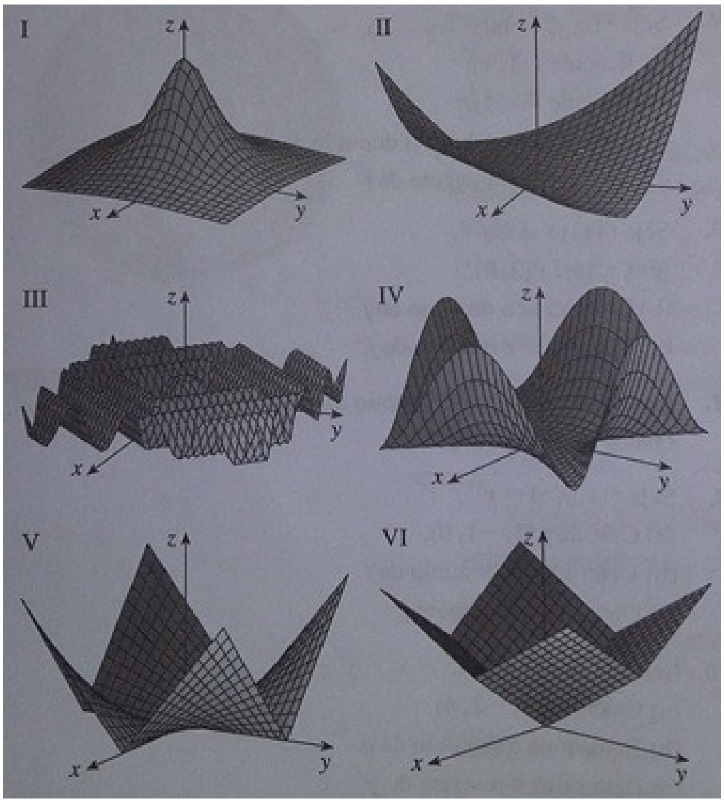
a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$
b) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$
c) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$
d) ★ $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$
e) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$
f) $f(x,y,z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

11. ([1], seção 14.1) Esboce o gráfico da função.

a) $f(x,y) = 3$
b) $f(x,y) = y$
c) $f(x,y) = 10 - 4x - 5y$
d) $f(x,y) = \cos x$
e) $f(x,y) = y^2 + 1$
f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

12. ([1], seção 14.1) Faça uma correspondência entre a função e seu gráfico (indicado por I-VI). Dê razões para sua escolha.

a) $f(x,y) = |x| + |y|$
b) $f(x,y) = |xy|$
c) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$
d) $f(x,y) = (x^2-y^2)^2$
e) $f(x,y) = (x-y)^2$
f) $f(x,y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$



13. ([3], seção 11.1) Nos itens abaixo: (i) Encontre o domínio da função; (ii) Encontre a imagem da função; (iii) Descreva as curvas de nível da função.

a) $f(x,y) = y - x$

b) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$

c) $f(x,y) = xy$

d) $f(x,y) = x^2 - y^2$

e) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$

f) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

g) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

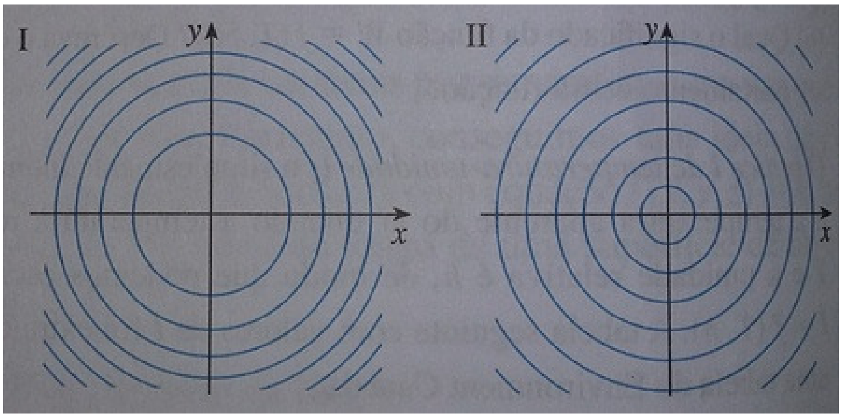
14. ([3], seção 11.1) Nos itens abaixo, encontre uma equação para a curva de nível da função $f(x,y)$ que passa pelo ponto dado.

a) ★ $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2, \quad (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

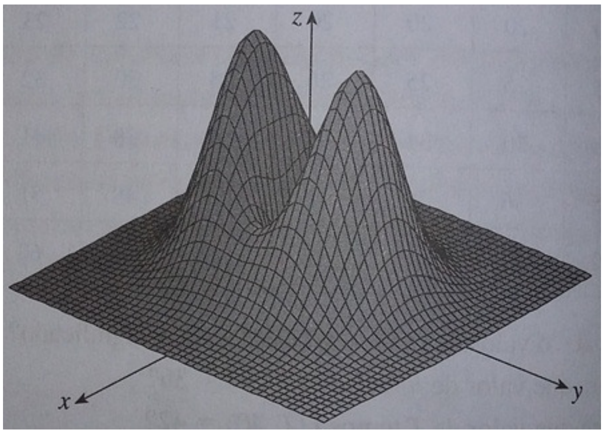
b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad (1, 0)$.

c) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \frac{dt}{1+t^2}, \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

15. ([1], seção 14.1) Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é de uma função f cujo gráfico é um cone. O outro é de uma função g cujo gráfico é um paraboloide. Qual é qual? Por quê?



16. ([1], seção 14.1) Faça um esboço do diagrama de contorno da função cujo gráfico é mostrado.



17. ([1], seção 14.1) Nos itens abaixo, faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

    a) $f(x, y) = (y - 2x)^2$

    b) $f(x, y) = y - \ln x$

    c) $f(x, y) = ye^x$

18. ([1], seção 14.1) Uma placa fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y). As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}.$$

19. ♦ ([1], seção 14.1)Faça uma correspondência entre a função: **(i)** e seu gráfico (indicado por A-F); **(ii)** e seus mapas de contorno (indicado por I-VI). Justifique sua escolha.

    a) $z = \operatorname{sen}(xy)$

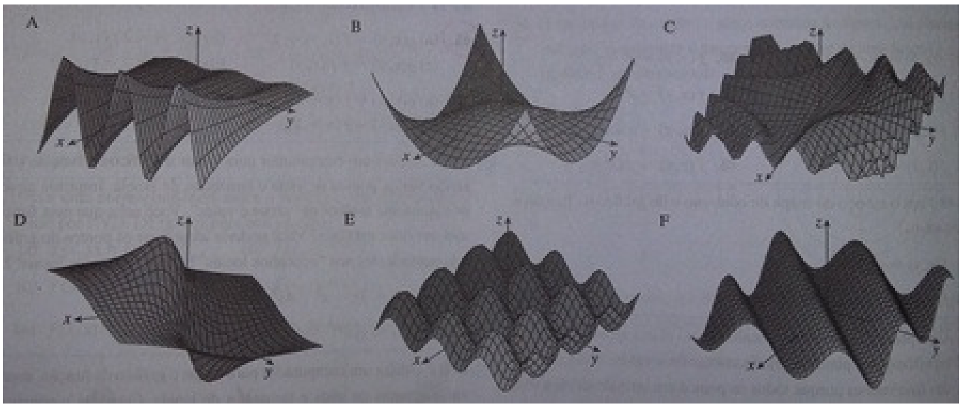
    b) $z = e^x \cos y$

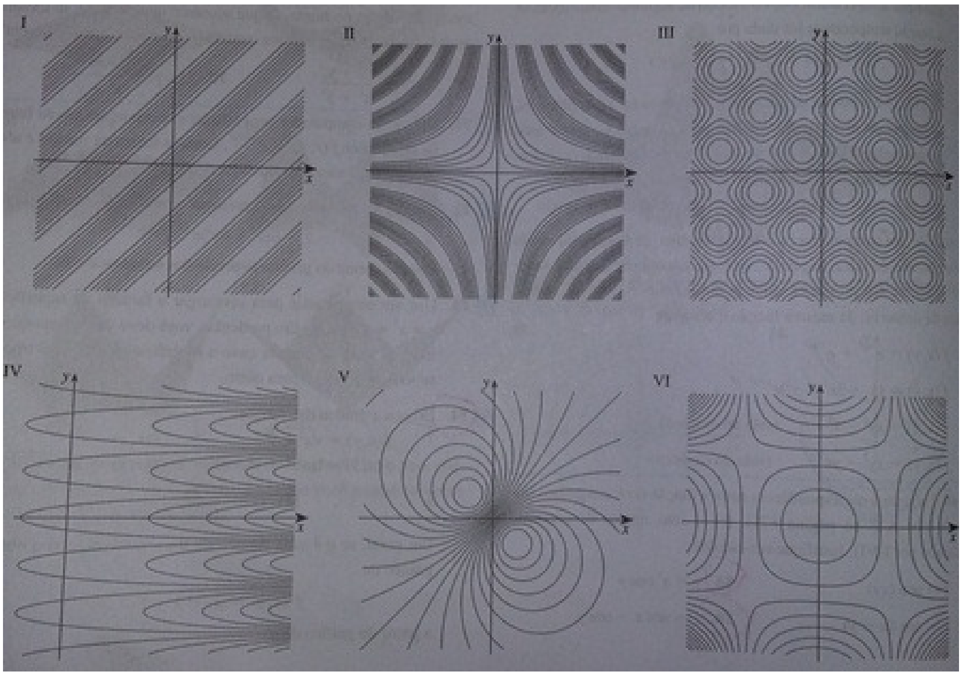
    c) $z = \operatorname{sen}(x - y)$

    d) $z = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y$

    e) $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

    f) $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$





20. ([3], seção 11.1) Nos itens abaixo encontre uma equação para a superfície de nível da função que passa pelo ponto dado.

 a) $f(x, y, z) = \sqrt{x - y} - \ln z, \quad (3, -1, 1).$

 b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad (-1, 2, 1)$

21. ([1], seção 14.1) Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

 a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ **b)** $g(x, y) = 2f(x, y)$

 c) $g(x, y) = -f(x, y)$ **d)** $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

22. ([1], seção 14.1) Esboce o gráfico das funções

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2});$$

$$f(x, y) = \text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2}); \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

 Em geral, se g é uma função de uma variável, como saber o gráfico de $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ a partir do gráfico de g?

23. ([2], seção 8.1) Seja $f(x, y) = 3x + 2y$. Calcule

 a) $f(1, -1)$ **b)** $f(a, x)$

 c) $\dfrac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$ **d)** $\dfrac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$

24. ([2], seção 8.1) Seja $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + 2y}$.

a) Determine o domínio.

b) Calcule $f(2u+v, v-u)$.

25. ([2], seção 8.1) Represente graficamente o domínio da função $z = f(x,y)$ dada por

a) $x + y - 1 + z^2 = 0,\ z \geq 0$

b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

c) $z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}$

d) $z = \ln(2x^2 + y^2 - 1)$

26. (Prova, 2007) Seja $f(x,y) = e^{xy}$ uma função de duas variáveis.

a) Determine o domínio e a imagem de f.

b) Esboce as curvas de nível de f.

27. ([1], seção 14.2) Suponha que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3,1)$? E se a função f for contínua?

28. ([3], seção 11.2) Se $f(x_0, y_0) = 3$, o que podemos dizer sobre

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

se f for contínua em (x_0, y_0)? E se f não for contínua em (x_0, y_0)? Justifique sua resposta.

29. ([1], seção 14.2) Explique por que cada função é contínua ou descontínua.

a) A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.

b) A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.

c) O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

30. ♦ ([1], seção 14.2) Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4-xy}{x^2+3y^2}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^4+3y^4}$

d) ★ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2+y^2}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^4+4y^2}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,\mathrm{sen}^2 y}{x^2+2y^2}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

31. ([1], seção 14.2) Determine $h(x,y) = g(f(x,y))$ e o conjunto no qual h é contínua, em que

$$g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x,y) = 2x + 3y - 6.$$

32. ([1], seção 14.2) Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

a) $F(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$

b) $G(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

33. ★ ([1], seção 14.2) Utilize coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, com $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$, e o teorema do confronto para calcular o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Dica: Note que, se (r,θ) são as coordenadas polares do ponto (x,y), com $r \geq 0$, então $r \to 0^+$ quando $(x,y) \to (0,0)$.

34. ([3], seção 11.2) Sabendo que $\left|\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\right| \leq 1$, podemos dizer algo sobre

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}?$$

Justifique sua resposta.

35. ♦ ([2], seção 9.1) Calcule, caso exista.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2 + y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4 + y^4}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y}{x - y}$

g) ★ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y - x^3}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 - y^2}$

36. ([2], seção 9.1) Seja $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$.

a) Considere a reta $\gamma(t) = (at, bt)$, com $a^2 + b^2 > 0$; mostre que, quaisquer que sejam a e b,

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma(t)) = 0.$$

Tente visualizar este resultado através das curvas de nível de f.

b) Calcule $\lim\limits_{t \to 0} f(\delta(t))$, onde $\delta(t) = (t^2, t)$. (Antes de calcular o limite, tente prever o resultado olhando para as curvas de nível de f.)

c) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$ existe? Por quê?

37. ★ ([2], seção 9.1) Determine se a função

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)}, & \text{se } x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

é contínua em $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Justifique sua resposta.

38. ♦ ([2], seção 9.2) Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique sua resposta.

a) $f(x, y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$

b) $f(x, y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$

c) $f(x, y) = \ln \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

39. (Prova, 2013) Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Calcule o limite $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ ou mostre que esse limite não existe.

b) Calcule o limite $\lim\limits_{(x,y) \to (1,1)} f(x, y)$ ou mostre que esse limite não existe.

c) f é contínua em $(0, 0)$? Justifique.

d) f é contínua em $(1, 1)$? Justifique.

40. (Prova, 2013)

a) Defina continuidade de uma função de duas variáveis $f(x,y)$ em um ponto (x_0, y_0) de seu domínio.

b) Dada a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{y}}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ L, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é possível encontrar L de maneira que f seja contínua em $(0,0)$?

41. (Prova, 2014) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{se } xy = 0, \\ k, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

em que k é um número real. É possível escolher k de modo que f seja contínua em $(0,0)$? Em caso afirmativo, qual deve ser o valor de k?

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. **a)** 48, o que significa que quando a temperatura real é 35ºC e a umidade relativa é 60%, o *humidex* é 48ºC.

   b) 50%.

   c) 35ºC.

   d) $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$ são funções de h que fornecem os valores do *humidex* quando a temperatura real é 20ºC e 40ºC, respectivamente. Ambas as funções crescem com h, porém $f(20, h)$ cresce aproximadamente a taxa constante, enquanto $f(40, h)$ cresce mais rapidamente a uma taxa crescente.

6. Sim.

7. **a)** 4.

   b) $\mathbb{R}^2$.

   c) $[0, \infty)$.

8. **a)** e.

   b) $\{(x, y, z) : \; z \geq x^2 + y^2\}$.

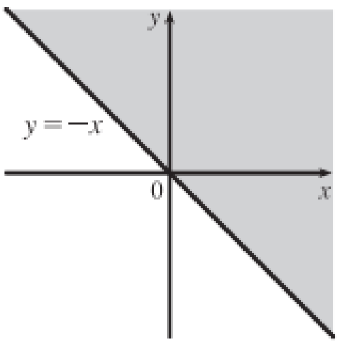
   c) $[1, \infty)$.

9. **a)** 0.

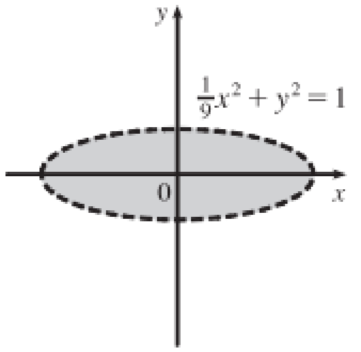
   b) $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 25\}$.

   c) $(-\infty, \ln(25)]$.

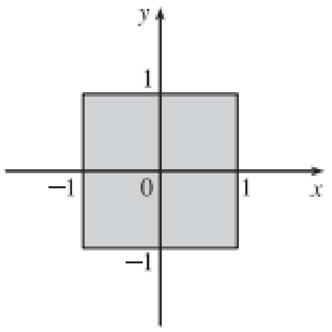
10. **a)** $\{(x, y); \; y \geq -x\}$



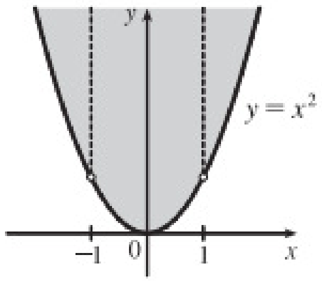
   b) $\left\{(x, y); \; \frac{x^2}{9} + y^2 < 1\right\}$.



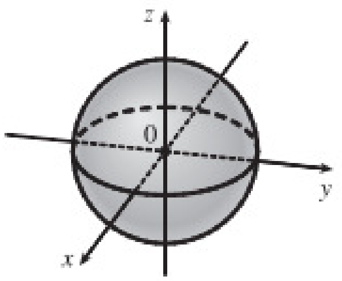
c) $\{(x,y);\ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$.



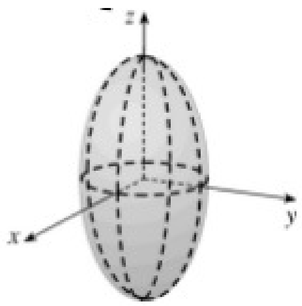
d) $\{(x,y);\ y \geq x^2,\ x \neq \pm 1\}$.



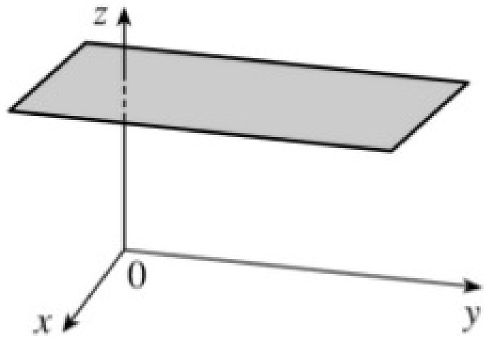
e) $\{(x,y);\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.



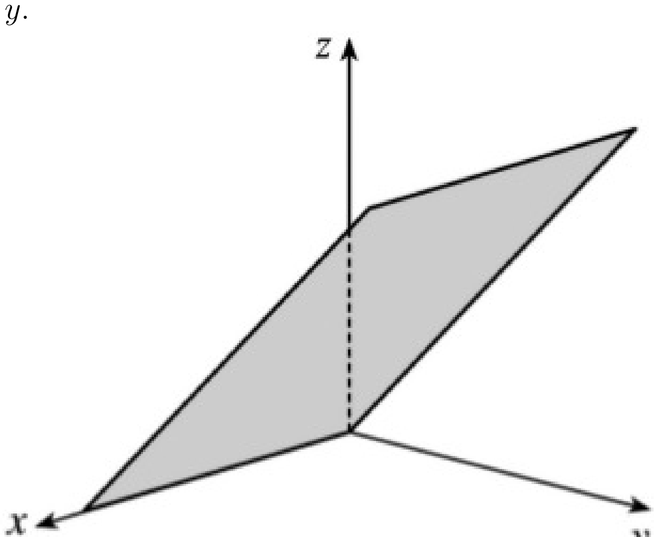
f) $\left\{(x,y);\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} < 1\right\}$.



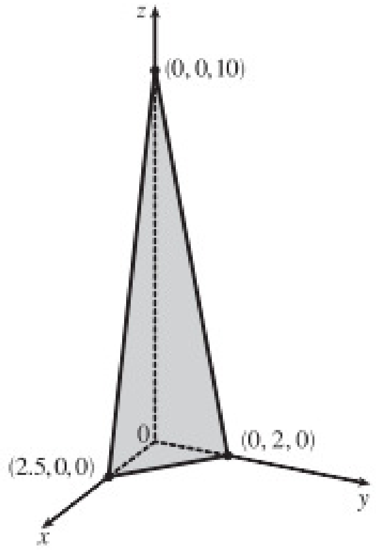
11. **a)** $z = 3$.



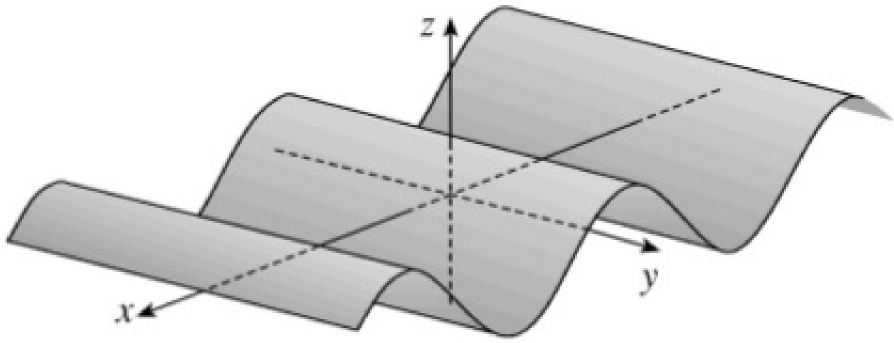
b) $z = y$.



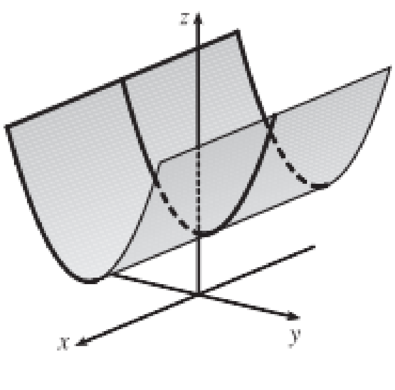
c) $z = 10 - 4x - 5y$.



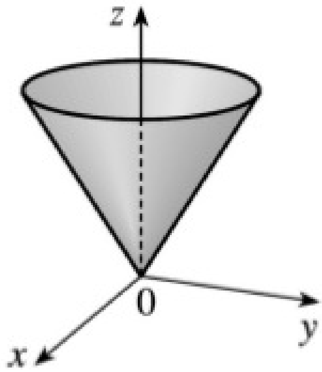
d) $z = \cos(x)$



e) $z = y^2 + 1$



f) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



12. **a)** $f(x,y) = |x| + |y|$.

    b) $f(x,y) = |xy|$.

    c) $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$.

    d) $f(x,y) = (x^2 - y^2)^2$.

    e) $f(x,y) = (x - y)^2$.

    f) $f(x,y) = \sin(|x| + |y|)$.

13. **a)** $D_f = \mathbb{R}^2$ e $Im(f) = \mathbb{R}$. As curvas de nível são as retas $y - x = C$.

    b) $D_f = \{(x,y);\ x \leq y\}$ e $Im(f) = \{z \in \mathbb{R};\ z \geq 0\}$. As curvas de nível são as retas $y - x = C$, com $C \geq 0$.

    c) $D_f = \mathbb{R}^2$ e $Im(f) = \mathbb{R}$. As curvas de nível são as hipérboles $xy = C$ quando $C \neq 0$ e os eixos x e y quando $C = 0$.

    d) $D_f = \mathbb{R}^2$ e $Im(f) = \mathbb{R}$. As curvas de nível são as hipérboles $x^2 - y^2 = C$ com foco no eixo x se $C > 0$; com foco no eixo y se $C < 0$ e as retas $y = \pm x$ se $C = 0$.

    e) $D_f = \{(x,y);\ (x,y) \neq (0,y)\}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$. As curvas de nível são as parábolas $y = Cx^2$ sem a origem se $C \neq 0$ e o eixo x se $C \neq 0$.

    f) $D_f = \{(x,y);\ (x,y) \neq (0,0)\}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$. As curvas de nível são os círculos $x^2 + y^2 = C$ com $C > 0$.

    g) $D_f = \mathbb{R}^2$ e $Im(f) = \{z \in \mathbb{R};\ 0 < z \leq 1\}$. As curvas de nível são as os círculos $x^2 + y^2 = C$ com $C > 0$ e a origem.

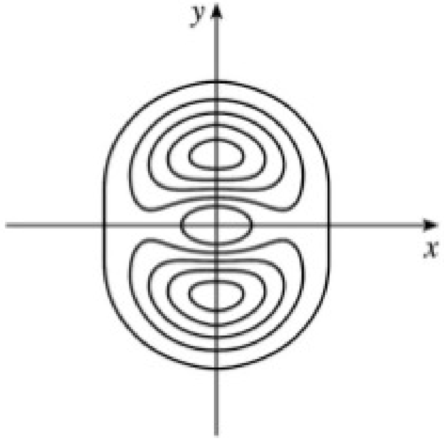
14. **a)** $x^2 + y^2 = 10$.

    b) $x = 1$ ou $x = -1$.

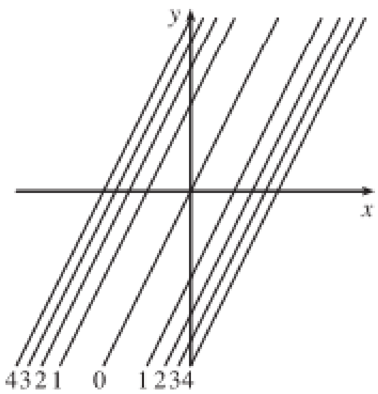
    c) $\arctan(y) - arctan(x) = 2\arctan(\sqrt{2})$.

15. I corresponde ao parabolóide e II ao cone.

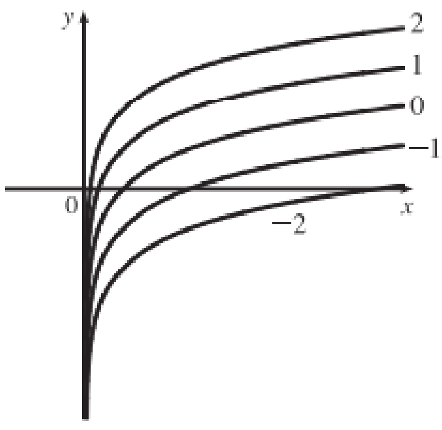
16. Diagrama de contorno:



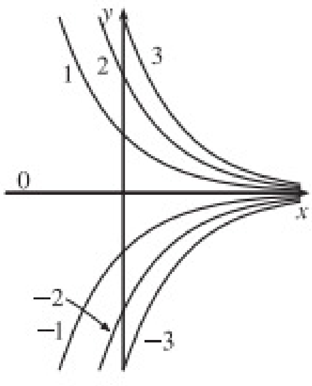
17. **a)** $y = 2x \pm \sqrt{C}$, $C \geq 0$.



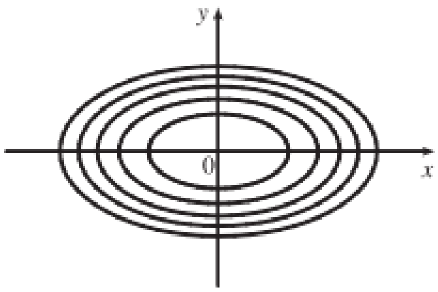
b) $y = \ln(x) + C$.



c) $y = Ce^{-x}$.



18. As isotérmicas são dadas pela família de elipses: $x^2 + 2y^2 = \frac{100}{C} - 1$, com $0 < C \leq 100$.

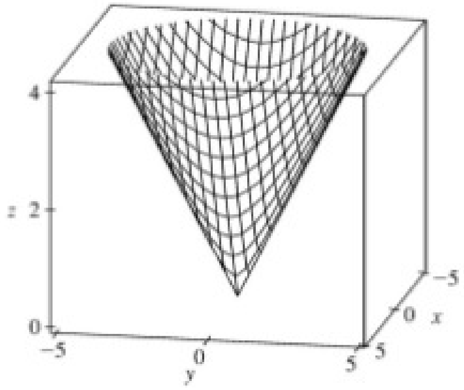


19. **a)** (i) C e (ii) II
    b) (i) A e (ii) IV
    c) (i) F e (ii) I
    d) (i) E e (ii) III
    e) (i) B e (ii) VI
    f) (i) D e (ii) V

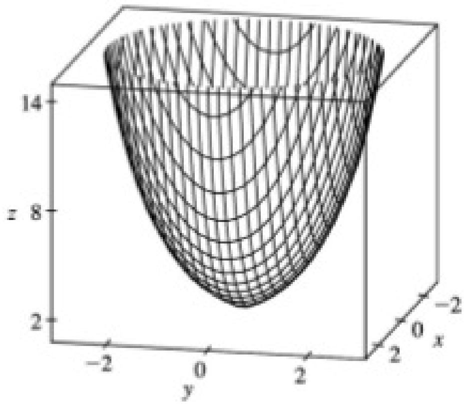
20. **a)** $\sqrt{x-y} - \ln(z) = 2$.
    b) $x^2 + y + z^2 = 6$.

21. **a)** Gráfico de f deslocado para cima por duas unidades.
    b) Gráfico de f esticado verticalmente ao dobro.
    c) Gráfico de f refletido sobre o plano xy.
    d) Gráfico de f refletido sobre o plano xy e deslocado para cima por duas unidades.

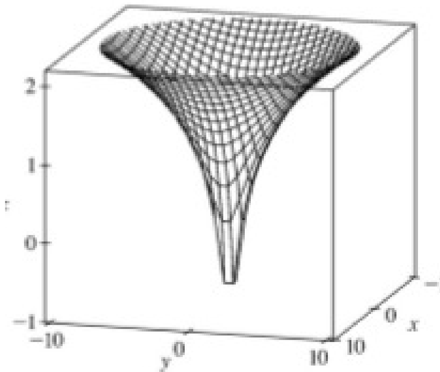
22. • $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



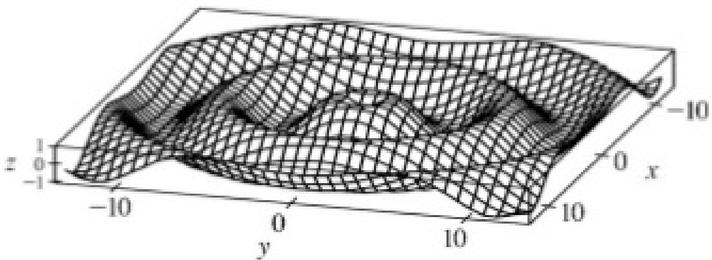
- $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$



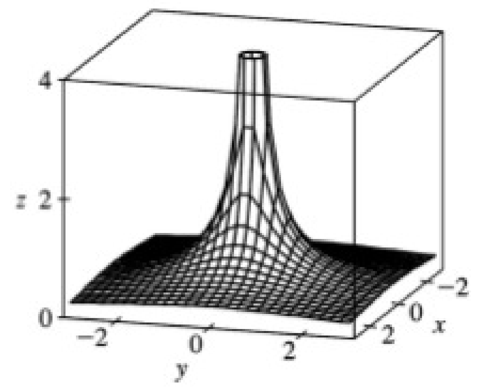
- $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$



- $f(x,y) = \operatorname{sen}(\sqrt{x^2+y^2})$



- $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$



O gráfico de $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ pode ser obtido rotacionando o gráfico de g no plano xz ao redor do eixo z.

23. **a)** 1.

    b) $3a + 2x$.

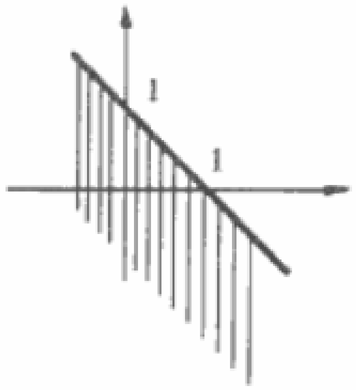
    c) 3.

    d) 2.

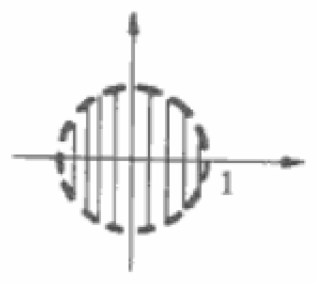
24. **a)** $\{(x,y);\ x \neq -2y\}$

    b) $\frac{u}{v}$.

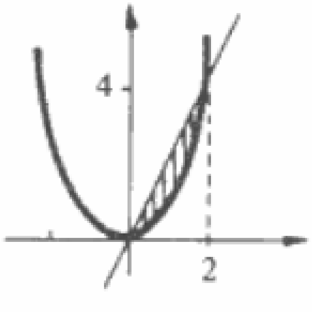
25. **a)** $\{(x,y);\ x + y \leq 1\}$



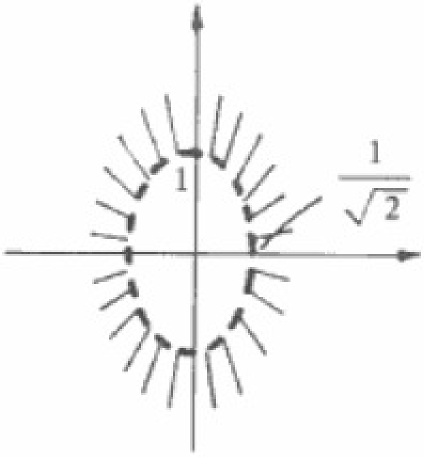
    b) $\{(x,y);\ x^2 + y^2 < 1\}$



c) $\{(x, y);\ x^2 \leq y \leq 2x\}$

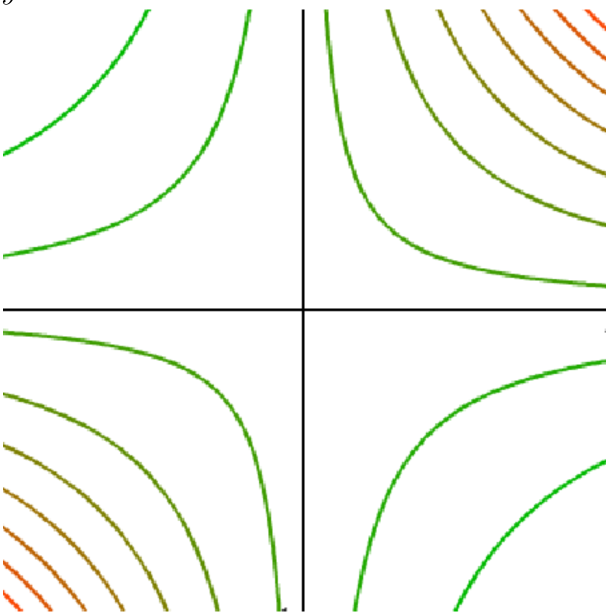


d) $\{(x, y);\ 2x^2 + y^2 > 1\}$



26. **a)** $D_f = \mathbb{R}^2$ e $Im(f) = \{z \in \mathbb{R};\ z > 0\}$.

    b) $xy = C$.



27. Nada se pode afirmar. Se f for contínua em (x_0, y_0), $f(3, 1) = 6$.

28. Se f for contínua em (x_0, y_0), então o limite é igual a $f(x_0, y_0) = 3$. Se não

for contínua em (x_0, y_0), então o limite pode ter qualquer valor diferente de 3.

29. **a)** Contínua.

    b) Descontínua.

    c) Descontínua.

30. **a)** 2025.

    b) $\frac{2}{7}$.

    c) Não existe.

    d) Não existe.

    e) 0.

    f) Não existe.

    g) 0.

    h) 2.

31. $h(x,y) = (2x+3y-6)^2 + \sqrt{2x+3y-6}$ é contínua em $\left\{(x,y);\ y \geq -\frac{2x}{3} + 2\right\}$.

32. **a)** $\{(x,y);\ y \neq x^2\}$.

    b) $\{(x,y);\ x^2 + y^2 > 4\}$.

    c) $\{(x,y);\ (x,y) \neq (0,0)\}$.

    d) $\{(x,y);\ (x,y) \neq (0,0)\}$.

33. 0.

34. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

35. **a)** 0.

    b) Não existe.

    c) 0.

    d) Não existe.

    e) Não existe.

    f) Não existe.

    g) Não existe.

    h) Não existe.

36. **b)** 1.

    c) Não existe.

37. 0.

38. **a)** $\mathbb{R}^2$.

b) $\{(x, y);\ 2x^2 + 3y^2 \leq 6\{$.

c) $\{(x, y);\ x > y\{$.

d) $\{(x, y);\ x^2 + y^2 < 1\{$.

39. **a)** O limite não existe.

    b) 0.

    c) Não.

    d) Sim.

40. **a)** $f(x, y)$ é contínua em $(x_0, y_0) \in D_f$ se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

    b) $L = 0$.

41. $k = 0$.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 2, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.