MA211 - Lista 09

Coordenadas Esféricas e Mudança de Variáveis

26 de outubro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ♦ ([1], seção 15.8) Um sólido está acima do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo da esfera
$x^2+y^2+z^2 = z$. Escreva uma descrição do sólido em termos de desigualdades envolvendo coordenadas esféricas.

Solução: A mudança de coordenadas retangulares para coordenadas cartesianas é dada por

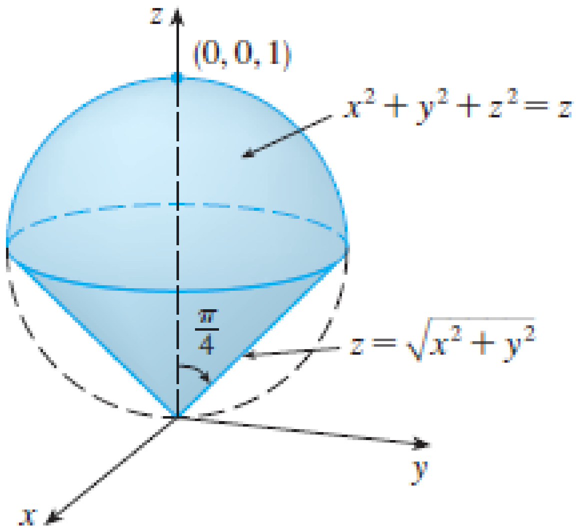
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\phi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \\ z = \rho\cos\phi, \end{cases}$$

em que $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\phi \in [0, \pi]$. Observe que $\text{sen}\,\phi \geq 0$ quando $\phi \in [0, \pi]$. Logo, a equação do cone em coordenadas esféricas pode ser escrita como $\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2\,\text{sen}^2\,\phi} = \rho\,\text{sen}\,\phi$. A origem $(0,0,0)$ pertence ao cone e é dada por $\rho = 0$. Nos demais pontos, $\rho \neq 0$, donde $\phi = \pi/4$.

A equação da esfera em coordenadas esféricas pode ser escrita como $\rho^2 = \rho\cos\phi$. A origem $(0,0,0)$ pertence à esfera e é dada por $\rho = 0$. Nos demais pontos, $\rho \neq 0$, donde $\rho = \cos\phi$.

Portanto, o sólido pode ser descrito em coordenadas esféricas por

$$E = \left\{(\rho,\theta,\phi) : 0 \leq \rho \leq \cos\phi, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$



2. ★ ([2], seção 5.5) Calcule utilizando coordenadas esféricas.

$$\iiint\limits_B z\,dxdydz, \text{ onde } B \text{ é o conjunto } 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \text{ e } z \ge 0.$$

Solução: Usando coordenadas esféricas, o sólido pode ser descrito por

$$B = \left\{(\rho,\theta,\phi) : 1 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi \text{ e } 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Lembre que o Jacobiano dessa transformação é $\rho^2 \operatorname{sen}\phi$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 (\rho\cos\phi)(\rho^2\operatorname{sen}\phi)\,d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^4}{4}\frac{\operatorname{sen}2\phi}{2}\Bigg|_{\rho=1}^{\rho=2}\right) d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{(16-1)}{8}\frac{(-\cos 2\phi)}{2}\Bigg|_{\phi=0}^{\rho=\frac{\pi}{2}}\right) d\theta \\
&= -\frac{15}{16}(-1-1)\theta\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{15\pi}{4}.
\end{aligned}$$

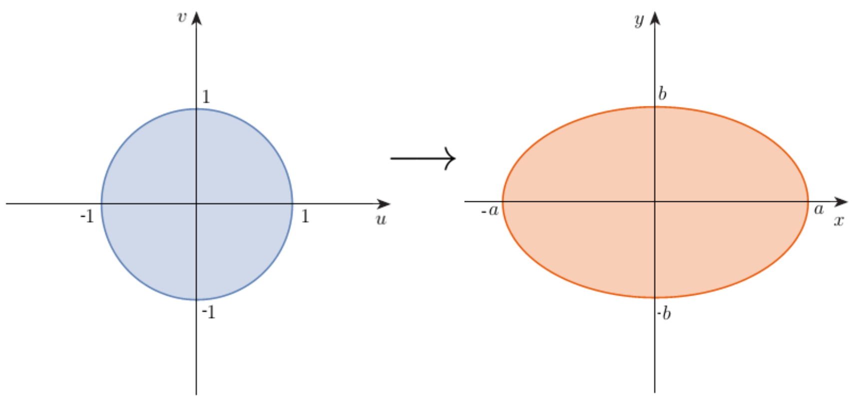
3. ♦ ([1], seção 15.9) Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

S é o disco dado por $u^2+v^2 \le 1$;
$x = au$, $y = bv$.

Solução: Suponha a e b não-nulos. Por essa mudança de coordenadas, temos que $u = x/a$ e $v = y/b$. Substituindo na equação dada, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,$$

isto é, o disco S é transformado em uma elipse.



4. ★ ([2], seção 4.2) Calcule a integral $\displaystyle\iint_R \frac{e^{y-x^2}}{y-x^2}dA$, em que R é o conjunto de todos (x,y) tais que $1+x^2 \leq y \leq 2+x^2$, $y \geq x+x^2$ e $x \geq 0$, efetuando uma mudança de variáveis apropriada.

Solução: Olhando o integrando, é natural pensar que uma das novas variáveis introduzidas deva ser $y-x^2$, mas a outra, a princípio, não está pré-definida. Seja $u = y - x^2$ (escolheremos v apropriadamente depois). Vamos analisar a região de integração dada.

- Como $1+x^2 \leq y \leq 2+x^2$, temos $1 \leq y-x^2 \leq 2$, isto é, $1 \leq u \leq 2$;
- Como $y \geq x+x^2$ e $x \geq 0$, temos $y-x^2 \geq x \geq 0$, isto é, $u \geq x \geq 0$.

Da análise acima, é natural pensar na outra variável como sendo $v = x$. Considere então a mudança de variáveis dada por

$$\begin{cases} x = v, \\ y = u + v^2. \end{cases}$$

O Jacobiano dessa transformação é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2v \end{vmatrix} = -1.$$

Como analisamos anteriormente, a nova região de integração é

$$S = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2 \text{ e } 0 \leq v \leq u\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{e^{y-x^2}}{y-x^2}\,dA &= \iint_S \frac{e^u}{u}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dvdu \\ &= \int_1^2 \int_0^u \frac{e^u}{u}(1)\,dvdu \\ &= \int_1^2 \left(\left.\frac{ve^u}{u}\right|_{v=0}^{v=u} \right) du \\ &= \int_1^2 e^u\,du \\ &= e^u\big|_1^2 = e^2 - e. \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ([1], seção 15.8) Marque o ponto cujas coordenadas esféricas é $(1, 0, 0)$ e encontre as coordenadas retangulares do ponto.

6. ♦ ([1], seção 15.8) Mude o ponto $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ dado em coordenadas retangulares para esféricas.

7. ([1], seção 15.8) Identifique a superfície cuja equação é $\rho = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$.

8. ♦ ([1], seção 15.8) Escreva a equação $z^2 = x^2 + y^2$ em coordenadas esféricas.

9. ([1], seção 15.8) Esboce o sólido descrito por $\rho \leq 2$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ e $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

10. ([1], seção 15.8) Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral abaixo e calcule-a.
$$\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^{3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\theta d\phi$$

11. ♦ ([3], seção 12.6) Calcule as integrais em coordenadas esféricas.

    a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta$

    b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} (\rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta$

    c) ★ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\phi)/2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta$

    d) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 5\rho^3 \operatorname{sen}^3\phi \, d\rho d\phi d\theta$

12. ♦ ([1], seção 15.8) ([2], seção 5.5) (Prova, 2013) Calcule utilizando coordenadas esféricas.

    a) $\displaystyle\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dV$, onde B é a bola com centro na origem e raio 5.

    b) $\displaystyle\iiint_H (9 - x^2 - y^2) \, dV$, onde H é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ e $z \geq 0$.

    c) $\displaystyle\iiint_E z \, dV$, onde E está entre as esferas $x^2+y^2+z^2 = 1$ e $x^2+y^2+z^2 = 4$, no primeiro octante.

    d) $\displaystyle\iiint_E xyz \, dV$, onde E está entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.

e) $\displaystyle\iiint_B x\,dxdydz$, onde B é o conjunto $x \geq 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

g) $\displaystyle\iiint_B x\,dxdydz$, onde B é o conjunto $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 \leq 1$ e $x \geq 0$.

h) $\displaystyle\iiint_B \sqrt{x+y}\,\sqrt[3]{x+2y-z}\,dxdydz$, onde B é a região $1 \leq x + y \leq 2$, $0 \leq x + 2y - z \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

i) $\displaystyle\iiint_B z\,dxdydz$, onde B é o conjunto $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

j) $\displaystyle\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, onde B é a interseção da semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$, com o cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$.

j) $\displaystyle\iiint_E xyz\,dV$, onde E é o sólido limitado pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - y^2$.

13. ([3], seção 12.6) Seja D a região limitada abaixo pelo plano $z = 0$, acima pela esfera
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e dos lados pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Monte as integrais triplas em coordenadas esféricas que dão o volume de D usando as ordens de integração a seguir.

    a) $d\rho\, d\phi\, d\theta$ **b)** $d\phi\, d\rho\, d\theta$

14. (Prova, 2006) Seja E o sólido limitado pelos dois planos $z = 1$ e $z = 2$ e lateralmente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Expresse o volume de E como integral tripla em coordenadas esféricas (não é necessário calcular a integral).

15. ♦ ([1], seção 15.8) ([2], seção 5.5) ([3], seção 12.6) (Prova, 2010,2014) Usando coordenadas esféricas, determine:

    a) O volume da parte da bola $\rho \leq a$ que está entre os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.

    b) O volume do elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$.

    c) O volume da porção da esfera sólida $\rho \leq a$ que está entre os cones $\phi = \pi/3$ e $\phi = 2\pi/3$.

    d) O volume da menor região cortada da esfera sólida $\rho \leq 2$ pelo plano $z = 1$.

    g) ★ O volume da região cortada do cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1$ pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

h) O volume do sólido que está acima do plano $z = 2\sqrt{3}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

i) O volume do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4\cos\phi$.

j) O volume e o centroide do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4\cos\phi$.

l) O volume do sólido que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

m) O centroide e o momento de inércia em relação a um diâmetro de sua base do hemisfério sólido homogêneo de raio a.

16. (Prova, 2006) O centróide de uma região E é dado por

$$\overline{x} = \frac{1}{vol(E)} \int_E x\,dV, \quad \overline{y} = \frac{1}{vol(E)} \int_E y\,dV \text{ e } \overline{z} = \frac{1}{vol(E)} \int_E z\,dV.$$

Calcule o centróide da região dada em coordenadas esféricas por $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi/3$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (observe que, devido à simetria da região, $\overline{x}$ e $\overline{y}$ se anulam, bastando calcular a terceira coordenada).

17. ♦ ([1], seção 15.8) ([3], seção 12.6) Dentre as coordenadas cilíndricas ou esféricas, utilize a que lhe parecer mais apropriada.

a) Determine o volume e o centroide do sólido E que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) Determine o volume da menor cunha esférica cortada de uma esfera de raio a por dois planos que se interceptam ao longo de um diâmetro com um ângulo de $\pi/6$.

c) Determine o volume da região limitada abaixo pelo plano $z = 0$, lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$.

d) ★ Determine o volume da região limitada acima pelo paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ e abaixo pelo paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$.

18. ([1], seção 15.8) (Prova, 2007) Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,dzdydx$

b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\,dzdxdy$

c) $\displaystyle\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a-x^2-y^2}} (x^2 z + y^2 z + z^3)\,dzdxdy$

19. ([1], seção 15.8) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz = 2\pi.$$

(A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio da esfera aumenta indefinidamente.)

20. ([1], seção 15.9) Determine o jacobiano da transformação.

a) $x = 5u - v, \quad y = u + 3v.$

b) $x = uv, \quad y = \dfrac{u}{v}.$

c) $x = \dfrac{u}{u+v}, \quad y = \dfrac{v}{u-v}.$

d) $x = \alpha \operatorname{sen}\beta, \quad y = \alpha\cos\beta.$

e) $x = uv, \quad y = vw, \quad z = uw.$

21. ♦ ([1], seção 15.9) Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 2\}$;
$x = 2u + 3v$, $y = u - v$.

b) S é o quadrado limitado pelas retas $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$;
$x = v$, $y = u(1 + v^2)$.

c) S é a região triangular com vértices $(0,0), (1,1), (0,1)$;
$x = u^2$, $y = v$.

22. ♦ ([1], seção 15.9) Utilize a transformação dada para calcular a integral.

a) $\displaystyle\iint_R (x - 3y)\,dA$, em que R é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(2,1)$ e $(1,2)$; $x = 2u + v$, $y = u + 2v$.

b) $\displaystyle\iint_R x^2\,dA$, em que R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; $x = 2u$, $y = 3v$.

c) $\displaystyle\iint_R (x^2 - xy + y^2)\,dA$, em que R é a região delimitada pela elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}u - \sqrt{\dfrac{2}{3}}v$, $y = \sqrt{2}u + \sqrt{\dfrac{2}{3}}v$.

d) ★ $\displaystyle\iint_R xy\,dA$, em que R é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$; $x = \dfrac{u}{v}$, $y = v$.

23. ([1], seção 15.9)

a) Calcule $\iiint\limits_E dV$, em que E é o sólido delimitado pelo elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Utilize a transformação $x = au$, $y = bv$ e $z = cw$.

b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação, os polos foram achatados. Assim, seu formato pode ser aproximado por um elipsoide com $a = b = 6.378$ km e $c = 6.356$ km. Use o item **(a)** para estimar o volume da Terra.

24. (Prova, 2010) Considere a transformação do plano xy no plano uv dada por $u = x - 2y$ e $v = 3x - y$.

a) Inverta a transformação, isto é, obtenha as expressões da transformação do plano uv no plano xy.

b) Represente geometricamente a região R no plano xy obtida como imagem da transformação aplicada à região delimitada por $u = 0$, $u = 4$, $v = 1$, $v = 8$.

c) Utilize a transformação dada para calcular a integral

$$\iint\limits_R \frac{x - 2y}{3x - y}\, dA.$$

25. ♦ ([1], seção 15.9) ([2], seção 4.2) (Prova, 2013) Calcule a integral, efetuando uma mudança de variáveis apropriada.

a) $\displaystyle\iint\limits_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dA$, em que R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$.

b) $\displaystyle\iint\limits_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\, dA$, em que R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$.

c) $\displaystyle\iint\limits_R e^{x+y}\, dA$, em que R é dada pela inequação $|x| + |y| \leq 1$.

d) $\displaystyle\iint\limits_R x^2\, dA$, em que R é o conjunto de todos (x, y) tais que $4x^2 + y^2 \leq 1$.

e) $\displaystyle\iint\limits_R \operatorname{sen}(4x^2 + y^2)\, dA$, em que R é o cojunto de todos (x, y) tais que $4x^2 + y^2 \leq 1$ e $y \geq 0$.

f) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{\sqrt[3]{y - x}}{1 + y + x}\, dA$, em que R é o triângulo de vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$.

g) $\displaystyle\iint_R x\,dA$, em que R é o conjunto, no plano xy, limitado pela cardioide $\rho = 1 - \cos\theta$.

i) $\displaystyle\iint_R x\,dA$, em que R é o círculo $x^2 + y^2 - x \leq 0$.

j) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dA$, em que R é a região limitada pela curva $x + y = 1$ e pelos eixos coordenados.

l) $\displaystyle\iint_R \frac{y - 2x}{3y + 2x}\,dA$, em que R é a paralelogramo de vértices $(1,2)$, $(2,4)$, $(5,2)$ e $(4,0)$.

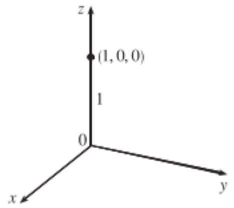
m) $\displaystyle\iint_R \frac{\cos(x - y)}{\operatorname{sen}(x + y)}\,dA$, em que R é a região trapezoidal com vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ e $(0,1)$.

26. ([1], seção 15.9) Seja f uma função contínua em $[0,1]$ e seja R a região triangular com vértices $(0,0), (1,0)$ e $(0,1)$. Mostre que

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 u f(u)\,du.$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. $(0,0,1)$.

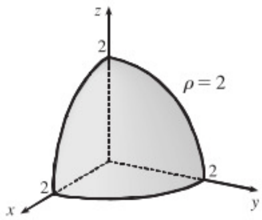


6. $\left(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$.

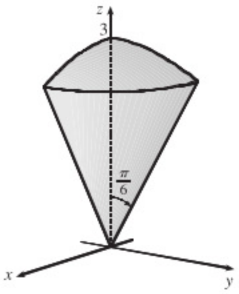
7. Esfera de raio $\frac{1}{2}$ centrada no ponto $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$.

8. $\cos^2\phi = \operatorname{sen}^2\phi$.

9. .



10. $\frac{9\pi}{4}(2-\sqrt{3})$.



11. **a)** π^2.

    b) 2π.

    c) $\frac{\pi}{3}$.

    d) $\frac{5\pi}{2}$.

12. **a)** $\frac{312500\pi}{7}$.

    b) $\frac{486\pi}{5}$.

c) $\dfrac{15\pi}{16}$.

d) 0.

e) 4π

g) 3π.

h) $\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$.

i) $\dfrac{\pi}{8}$.

j) $\dfrac{\pi}{4}\left(32-14\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})\right)$.

j) 0.

13. **a)** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2}\rho^2\operatorname{sen}(\phi)\,d\rho d\phi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{\csc(\phi)}\rho^2\operatorname{sen}(\phi)\,d\rho d\phi d\theta.$

    b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_{\pi/6}^{\operatorname{arcsen}(1/\rho)}\rho^2\operatorname{sen}(\phi)\,d\phi d\rho d\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\pi/6}\rho^2\operatorname{sen}(\phi)\,d\phi d\rho d\theta.$

14. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_{\sec(\phi)}^{2\sec(\phi)}\rho^2\operatorname{sen}(\phi)\,d\rho d\phi d\theta.$

15. **a)** $\left(\sqrt{3}-1\right)\dfrac{\pi a^3}{3}$.

    b) $\dfrac{4\pi abc}{3}$.

    c) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

    d) $\dfrac{5\pi}{3}$.

    g) $\dfrac{4\pi(8-3\sqrt{3})}{3}$.

    h) $\dfrac{88\pi}{3}$.

    i) 10π.

    j) Volume: 10π; centróide: $(0,0,2,1)$.

    l) $\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

    m) Centróide: $\left(0,0,\dfrac{3a}{8}\right)$; momento de inércia: $\dfrac{4Ka^5\pi}{15}$, onde K é a densidade constante.

16. $\overline{z}=\dfrac{9}{16}$.

17. **a)** Volume: $\dfrac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$; centróide: $\left(0, 0, \dfrac{3}{8(2-\sqrt{2})}\right)$.

b) $\dfrac{\pi a^3}{9}$.

c) $\dfrac{\pi}{2}$.

d) $\dfrac{5\pi}{2}$.

18. **a)** $\dfrac{(4\sqrt{2}-5)}{15}$.

b) π.

c) 0.

19. Note que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dxdydz$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho e^{-\rho^2} \rho^2 \operatorname{sen}(\phi)\, d\rho d\phi d\theta.$$

20. **a)** 16.

b) $-\dfrac{2u}{v}$.

c) 0.

d) $-\alpha$.

e) $2uvw$.

21. **a)** O paralelogramo com vértices $(0,0)$, $(6,3)$, $(12,1)$, $(6,-2)$.

b) A região limitada por $y = 1 + x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

c) A região limitada pela reta $y = 1$, pelo eixo y e por $y = \sqrt{x}$.

22. **a)** -3.

b) 6π.

c) $\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

d) $2\ln 3$.

23. **a)** $\dfrac{4\pi abc}{3}$.

b) $\dfrac{4\pi(6378)(6378)(6356)}{3} \approx 1.083 \times 10^{12}$ km^3.

24. **a)** $x = \dfrac{2v-u}{5}$, $y = \dfrac{v-3u}{5}$.

b) Região delimitada pelas retas $x = 2y$, $x = 2y + 4$, $y = 3x - 1$ e $3x - 8$.

c) $\dfrac{8\ln(8)}{5}$.

25. **a)** $\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}(1)$.

b) $\dfrac{\pi}{24}(1 - \cos(1))$.

c) $e - e^{-1}$.

d) $\dfrac{\pi}{32}$.

e) $\dfrac{\pi}{4}(1 - \cos(1))$.

f) 0.

g) $-\dfrac{5\pi}{4}$.

i) $\dfrac{\pi}{8}$.

j) π.

l) $-4\ln(2)$.

m) 1.

26. Utilize a mudança de variáveis $u = x + y$ e $v = y$.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 3, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.