MA211 - Lista 08

Integrais triplas e
Integrais Triplas em
Coordenadas Cilíndricas

19 de outubro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ★ ([1], seção 15.6) Calcule a integral tripla $\iiint_T x^2\,dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

   Solução: Para resolvermos a integral tripla, vamos desenhar dois diagramas: um da região sólida T (Figura 1) e o outro a sua projeção D no plano xy (Figura 2).

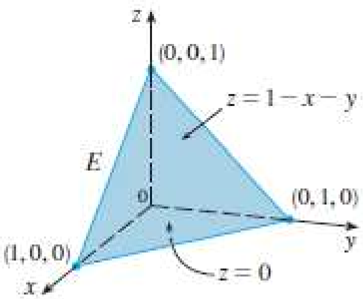


Figura 1: Figura 1

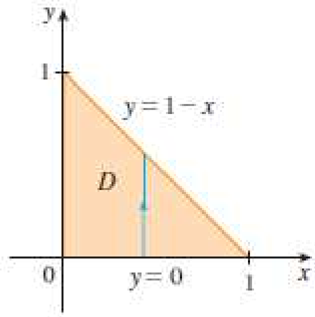


Figura 2: Figura 2

A fronteira inferior do tetraedro T é o plano $z=0$ e a superior é o plano $x+y+z=1$ (ou $z=1-x-y$). Notemos que os planos $x+y+z=1$ e $z=0$ se interceptam na reta $x+y=1$ (ou $y=1-x$) no plano xy. Logo a projeção de T é a região triangular da Figura 2 e temos

$$T=\{(x,y,z)|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1-x,\,0\le z\le 1-x-y\}.$$

Assim,

$$\iiint_T x^2\,dV=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-z} x^2\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x} x^2z\Big|_0^{1-x-y}dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x} x^2(1-x-y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2-x^3-x^2y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2y-x^3y-x^2\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}dx=\int_0^1\left(x^2(1-x)-x^3(1-x)-\frac{x^2}{2}(1-x)^2\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} \right] \Bigg|_0^1 = \frac{1}{60}.$$

2. ★ ([2], seção 5.4) Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado por $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2}$.

   Solução: Primeiramente, vamos determinar a projeção no plano xy da interseção de

$$z = \sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2} \tag{1}$$

$$z = x^2 + y^2 \tag{2}$$

   Da equação (1) temos que

$$z = \sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2} \Leftrightarrow z^2 = 4 - 3x^2 - 3y^2 \Leftrightarrow z^2 = 4 - 3(x^2 + y^2). \tag{3}$$

   Substituindo a equação (2) na equação (3) obtemos que

$$z^2 = 4 - z \Leftrightarrow z^2 + 3z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z - 4) = 0.$$

   Logo,$z = -4$ e $z = 1$. Notemos que $z = -4$ não satisfaz as equações (1) e (2), então a projeção D no plano xy é o círculo de raio 1, isto é, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R};\ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Assim, o volume, V, do sólido é:

$$V = \iint\limits_D \left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{4-3x^2-3y^2}} 1\, dz \right] dA = \iint\limits_D \sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2} - (x^2 + y^2)\, dA.$$

   Passando para coordenadas polares temos que

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \\ dA &= r\, dr\, d\theta \\ 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

   Então,

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sqrt{4 - 3r^2} - r^2) r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\sqrt{4 - 3r^2} - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left[\Bigg(\underbrace{\int_0^1 r\sqrt{4 - 3r^2}\, dr}_{\substack{u = 4 - 3r^2 \\ du = -6r\, dr}} \Bigg) - \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta\Big|_0^{2\pi} \cdot \left[\left(\int_4^1 r \cdot u^{1/2}\frac{du}{-6r}\right) - \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right)\right] \\
&= 2\pi \cdot \left[\left(-\frac{1}{6}\int_4^1 u^{1/2}\,du\right) - \frac{1}{4}\right] = 2\pi \cdot \left[\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_4^1\right) - \frac{1}{4}\right] \\
&= 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot 8 - \frac{1}{4}\right] = 2\pi \cdot \frac{19}{36} = \frac{19\pi}{18}.
\end{aligned}
$$

3. ★ (Prova, 2013) Encontre o volume da região sólida limitada abaixo pelo plano $z = 0$, lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$.

   Solução: Temos que a região sólida E está acima do plano $z = 0$, abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e limitado lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Notemos que podemos dividir a região sólida em quatro porções simétricas. Assim, levando em consideração a porção da região sólida E que está no primeiro octante, temos em coordenadas cilíndricas

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1 \text{ e } 0 \le z \le x^2 + y^2 = r^2.$$

   Assim, o volume da região sólida E é:

$$
\begin{aligned}
V = \iiint_E 1\,dV &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{r^2} 1\,r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 zr\Big|_0^{r^2} dr\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^1 r^3\,dr = 4\cdot\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 \\
&= 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

4. ⧫ (Prova, 2008) Determine o volume do sólido que está acima do plano xy, abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

   Solução: Temos que $0 \le z \le x^2 + y^2$. Como o sólido se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, devemos fazer a interseção desses dois cilindros, isto é,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

   Em coordenadas cilíndricas temos que

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \\ dz\,dy\,dx &= r\,dz\,dr\,d\theta \end{aligned}$$

Da equação $x^2 + y^2 = 1$ temos que

$$r^2 = 1 \Rightarrow = \pm 1,$$

como devemos ter $r \geq 0$, então nesse caso $r = 1$.

Da equação $x^2 + y^2 = 2x$ temos que

$$r^2 = 2r\ \cos\theta \Rightarrow r = 2\cos\theta.$$

Agora, sendo $x = \frac{1}{2}$ e $r = 1$ temos que

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Assim, em coordenadas cilíndricas temos que o sólido E é dado por

$$E = \{(\theta,\, r,\, z)| - \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3},\, 1 \leq r \leq 2\cos\theta,\, 0 \leq z \leq r^2\}.$$

Então,

$$V = \iiint\limits_E 1\,dV = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\theta} \int_0^{r^2} 1\,r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\theta} zr\Big|_0^r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^4}{4}\Big|_1^{2\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4\cos^4\theta - \frac{1}{4}\right) d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\cos^4\theta}_{\text{função par}}\,d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{função par}}\,d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4\theta\,d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4}\,d\theta$$

$$= 8\left[\frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta) + \frac{1}{32}\,\mathrm{sen}(4\theta)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{2}\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 8\left[\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{32}\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$= \pi + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\sqrt{3}}{8}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ([1], seção 15.6) Calcule a integral tripla $\iiint\limits_B xyz^2\,dV$, onde B é a caixa retangular dada por $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 3\}$, integrando primeiro em relação a y, depois a z e então a x.

6. ♦ ([1], seção 15.6) Calcule a integral iterada.

   a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xz\ dydxdz$ **b)** $\displaystyle\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\ dxdzdy$

   c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^y\int_0^x \cos(x+y+z)\ dzdxdy$

7. ♦ ([1], seção 15.6)([2], seção 5.4) Calcule a integral tripla.

   a) $\displaystyle\iiint\limits_E 2x\,dV$, onde $E = \{(x,y,z)|\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2},\ 0 \leq z \leq y\}$.

   b) $\displaystyle\iiint\limits_E 6xy\,dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1+x+y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$.

   c) $\displaystyle\iiint\limits_E x^2e^y\,dV$, onde E é delimitado pelo cilindro parabólico $z = 1-y^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.

   d) $\displaystyle\iiint\limits_E x\,dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $x = 4y^2+4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

   e) $\displaystyle\iiint\limits_E z\,dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2+z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante.

   f) $\displaystyle\iiint\limits_E xyz\ dxdydz$, onde E é o paralelepípedo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$, e $1 \leq z \leq 2$.

   g) $\displaystyle\iiint\limits_E x\ dxdydz$, onde E é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $x+y \leq z \leq x+y+1$.

   h) $\displaystyle\iiint\limits_E \sqrt{1-z^2}\ dxdydz$, onde E é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ e $0 \leq y \leq z$.

i) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{1-z^2}\, dxdydz$, onde E é o cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ e $0 \le z \le 1$.

j) $\displaystyle\iiint_E dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2 + y^2 \le z \le 2x$.

l) $\displaystyle\iiint_E (x^2 + z^2)\, dxdydz$, onde E é o cilindro $x^2 + y^2 \le 1$ e $0 \le z \le 1$.

m) $\displaystyle\iiint_E dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2 + y^2 \le z \le 2x + 2y - 1$.

n) $\displaystyle\iiint_E y\, dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2 + 4y^2 \le 1$ e $0 \le z \le 1$.

o) $\displaystyle\iiint_E x\, dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2 + y^2 \le 4$, $x \ge 0$ e $x + y \le z \le x + y + 1$.

p) $\displaystyle\iiint_E 2z\, dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2 + y^2 \le 1$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ e $z \ge 0$.

q) $\displaystyle\iiint_E x\, dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2 - y^2 \le z \le 1 - 2y^2$.

r) $\displaystyle\iiint_E e^{x^2}\, dxdydz$, onde E é o conjunto $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$ e $0 \le z \le 1$.

s) $\displaystyle\iiint_E x\, dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2 \le y \le x$, $0 \le z \le x + y$.

t) $\displaystyle\iiint_E 2z\, dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ e $z \ge 0$.

u) $\displaystyle\iiint_E 2z\, dxdydz$, onde E é o conjunto $4x^2 + 9y^2 + z^2 \le 4$ e $z \ge 0$.

v) $\displaystyle\iiint_E \cos z\, dxdydz$, onde E é o conjunto $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ e $x - y \le z \le x + y$.

w) $\displaystyle\iiint_E (y - x)\, dxdydz$, onde E é o conjunto $4 \le x + y \le 8$, $\frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}$, $y > x$ e $0 \le z \le \dfrac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x+y}}$.

8. ♦ ([3], seção 12.4) Calcule as integrais mudando a ordem de integração de maneira apropriada.

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\ \cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\ dxdydz$

b) ★ $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\ dydxdz$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\ \operatorname{sen}(\pi y^2)}{y^2}\ dxdydz$

9. ([3], seção 12.4) Encontre a constante a tal que

$$\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_a^{4-x^2-y} dzdydx = \frac{4}{15}.$$

10. ⧫ ([2], seção 5.4) ([1], seção 15.6) Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado.

a) $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ e $0 \le z \le 5 - x^2 - 3y^2$.

b) $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$ e $0 \le z \le x + y^2$.

c) $x^2 + y^2 \le z \le 4$.

d) $x^2 + 4y^2 \le z \le 1$.

e) $x^2 + y^2 \le 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$.

f) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \le 1$.

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, $\quad (a > 0,\ b > 0\ e\ c > 0)$.

h) $x^2 + y^2 \le z \le 4x + 2y$.

i) $x^2 + y^2 \le 1$ e $x^2 + z^2 \le 1$.

j) $(x - a)^2 + y^2 \le a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 4a^2$, $z \ge 0 \quad (a > 0)$.

l) $x^2 + y^2 \le a^2$ e $x^2 + z^2 \le a^2$ $(a > 0)$.

m) $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ e $z \ge \dfrac{a}{2} \quad (a > 0)$.

n) $x^2 \le z \le 1 - y$ e $y \ge 0$.

o) $x^2 + 2y^2 \le z \le 2a^2 - x^2$ $(a > 0)$.

p) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \le 1$ e $z \ge x^2 + y^2$.

q) $4x^2 + 9y^2 + z^2 \le 4$ e $4x^2 + 9y^2 \le 1$.

r) O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$.

s) O sólido limitado pelo paraboloide $x = y^2 + z^2$ e pelo plano $x = 16$.

t) O sólido delimitado pelo cilindro $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $x + z = 1$.

11. ([3], seção 12.4) Para qual valor de c o volume do elipsoide $x^2 + (y/2)^2 + (z/c)^2 = 1$ é igual a 8π?

12. ([1], seção 15.6)([4], seção 17.5) Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dydzdx$ **b)** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dxdzdy$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_2^3 dxdydz$ **d)** $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dzdydx$

13. ([4], seção 17.5) Esboce a região limitada pelos gráficos das equações e use uma integral tripla para calcular seu volume.

a) $z + x^2 = 4$, $y + z = 4$, $y = 0$ e $z = 0$.

b) $y = 2 - z^2$, $y = z^2$, $x + z = 4$ e $x = 0$.

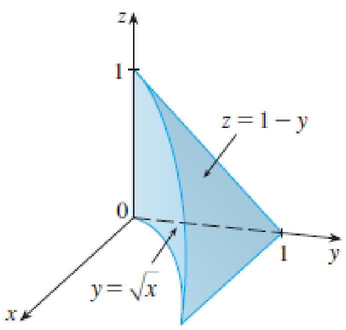
c) $y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 2$ e $x = 0$.

14. ([3], seção 12.4) Escreva seis integrais triplas iteradas diferentes para o volume do sólido retangular no primeiro octante limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$. Calcule uma das integrais.

15. ★ ([1], seção 15.6) A figura mostra a região de integração da integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dzdydx.$$

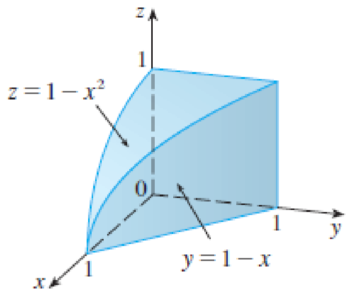
Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



16. ([1], seção 15.6) A figura mostra a região da integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\, dydzdx.$$

Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



17. ([1], seção 15.6)([2], seção 5.4) Determine a massa e o centro de massa do cubo dado por $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ e com função densidade:

    a) $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

    b) $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

18. ♦ ([4], seção 17.5) Ache o centro de massa de E, em que:

    a) A densidade de um ponto P de um sólido cúbico E de aresta a é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P a um vértice fixo do cubo.

    b) E é o tetraedro delimitado pelos planos coordenados e o plano $2x + 5y + z = 10$ e a densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância do plano xz a P.

19. ([2], seção 5.4) Calcule a massa do sólido $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, sendo a densidade dada por $\rho(x, y, z) = x + y$.

20. ([1], seção 15.6) Suponha que o sólido tenha densidade constante k. Encontre os momentos de inércia para um cubo com comprimento do lado L se um vértice está localizado na origem e três arestas estão nos eixos coordenados.

21. ★ ([1], seção 15.6) Determine o sólido E para a qual a integral

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\, dV$$

    é máxima.

22. ([2], seção 5.4) Calcule a massa do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 2$, sabendo que a densidade no ponto (x, y, z) é o dobro da distância do ponto ao plano $z = 0$.

23. ([3], seção 12.5) Encontre o centróide e os momentos de inércia I_x, I_y e I_z do tetraedro cujos vértices são os pontos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

24. ([3], seção 12.5) Um cubo sólido de 2 unidades de lado é limitado pelos planos $x = \pm 1$, $z = \pm 1$, $y = 3$ e $y = 5$. Encontre o centro de massa e os momentos de inércia desse cubo.

25. (Prova, 2010) Seja C o cilindro de base circular e eixo (Oz), com raio 2 e altura 3, com base na origem e densidade inversamente proporcional à distância ao eixo.

    a) Determine o momento de inércia de C com relação ao eixo (Oz).

    b) Se C gira em torno do eixo (Oz) com energia cinética K, qual a velocidade instantânea nos pontos de sua superfície lateral?
    (Fórmulas: • Momento de inércia: $I = \iiint\limits_C \rho \cdot l^2 \, dV$, onde ρ é a densidade e l é a distância ao eixo; • Energia cinética de rotação: $K = \dfrac{1}{2} I \omega^2$.)

26. ([1], seção 15.7) Marque o ponto cujas coordenadas cilíndricas são $(2, \pi/4, 1)$ e $(4, -\pi/3, 5)$. Em seguida, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

27. ([1], seção 15.7) Mude as coordenadas de $(1, -1, 4)$ de retangulares para cilíndricas.

28. ([1], seção 15.7) Identifique a superfície cuja equação é dada por $z = 4 - r^2$.

29. ([1], seção 15.7) Esboce o sólido descrito pelas desigualdades $0 \leq r \leq 2$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq z \leq 1$.

30. ([1], seção 15.7) Uma casca cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno de 6 cm e raio externo de 7 cm. Escreva desigualdades que descrevam a casca em um sistema de coordenadas adequado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas em relação à casca.

31. ([3], seção 12.6) Seja D a região limitada abaixo pelo plano $z = 0$, acima pela esfera
    $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e dos lados pelo cilindo $x^2 + y^2 = 1$. Monte as integrais triplas em coordenadas cilíndricas que dão o volume de D usando as ordens de integração a seguir.

    a) $dzdrd\theta$

    b) $drdzd\theta$

    c) $d\theta dzdr$

32. ([1], seção 15.7) Faça o esboço do sólido cujo volume é dado pela integral e calcule essa integral.

    a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_r^4 r \, dz d\theta dr$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{9-r^2} r dz dr d\theta$

33. ♦ (Prova, 2010) Considere a integral tripla iterada

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dzdydx.$$

a) Transforme a integral utilizando coordenadas cilíndricas.

b) Calcule a integral.

c) Descreva o sólido cujo volume é dado por essa integral.

34. ♦ ([1], seção 15.7)(Prova, 2013) Calcule as seguintes integrais triplas.

a) $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2}\, dV$, em que E é a região que está dentro do cilindro $x^2+y^2=16$ e entre os planos $z=-5$ e $z=4$.

b) $\iiint\limits_E y\, dV$, em que E é o sólido que está entre os cilindros $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$, acima do plano xy e abaixo do plano $z=x+2$.

c) $\iiint\limits_E x\, dV$, em que E está delimitidado pelos planos $z=0$ e $z=x+y+5$ e pelos cilindros $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=9$.

d) $\iiint\limits_E x^2\, dV$, em que E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2+y^2=1$, acima do plano $z=0$ e abaixo do cone $z^2=4x^2+4y^2$.

e) $\iiint\limits_E xyz\, dV$, em que E é o sólido limitado pelos paraboloides $z=x^2+y^2$, $z=8-x^2-y^2$.

f) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\, dzdxdy$

35. ([1], seção 15.7) Seja E a região limitada pelos paraboloides $z=x^2+y^2$ e $z=36-3x^2-3y^2$.

a) Ache o volume da região E.

b) Encontre o centroide de E (centro de massa no caso em que a densidade é constante).

36. (Prova, 2013) Calcule, usando integração, o volume do sólido limitados pelas superfícies $z=1$, $z=2$ e $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

37. (Prova, 2014) Determine o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=4$ e pelos planos $z=0$ e $y+z=3$.

38. (Prova, 2010) Vamos demonstrar a expressão geral para o volume de um cone circular de altura h e raio da base R.

a) Representando o cone com vértice na origem e base no plano $z = h$, expresse V por meio de uma integral dupla.

b) Calculando a integral, verifique que $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. $\dfrac{27}{4}$.

6. **a)** 1.

   b) $\dfrac{e^3-1}{3}$.

   c) $-\dfrac{1}{3}$.

7. **a)** 4.

   b) $\dfrac{65}{28}$.

   c) $\dfrac{8}{3e}$.

   d) $\dfrac{16\pi}{3}$.

   e) $\dfrac{27}{8}$.

   f) $\dfrac{3}{2}$.

   g) $\dfrac{1}{2}$.

   h) $\dfrac{1}{3}$.

   i) $\dfrac{\pi}{4}$.

   j) $\dfrac{\pi}{2}$.

   l) $\dfrac{7\pi}{12}$.

   m) $\dfrac{\pi}{2}$.

   n) 0.

   o) $\dfrac{16}{3}$.

   p) $\dfrac{7\pi}{2}$.

   q) 0.

   r) $\dfrac{e-1}{2}$.

   s) $\dfrac{11}{120}$.

   t) 8π.

u) 0.

v) 2.

w) $3-6\sqrt[3]{2}-2\sqrt{2}+6\sqrt[6]{2^5}$.

8. **a)** $2\,\mathrm{sen}(4)$.

   b) $3e-6$.

   c) 4.

9. $\dfrac{13}{3}$ ou 3.

10. **a)** $\dfrac{11}{3}$.

    b) $\dfrac{25}{84}$.

    c) 8π.

    d) $\dfrac{\pi}{4}$.

    e) $\left(36-\dfrac{20\sqrt{5}}{3}\right)\pi$.

    f) $\dfrac{2\pi}{9}$.

    g) $\dfrac{4\pi abc}{3}$.

    h) $\dfrac{25\pi}{4}$

    i) $\dfrac{16}{3}$.

    j) $\dfrac{16a^3}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}\right)$.

    l) $\dfrac{16a^3}{3}$.

    m) $\dfrac{5\pi a^3}{24}$.

    n) $\dfrac{4}{15}$.

    o) πa^4.

    p) $\dfrac{71\pi}{54}$.

    q) $\dfrac{7\pi}{12}$.

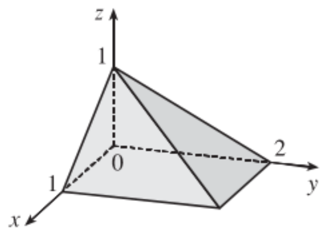
    r) $\dfrac{16}{3}$.

s) 128π.

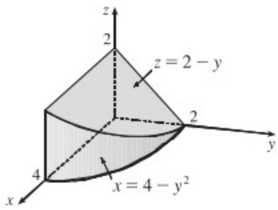
t) $\dfrac{8}{15}$.

11. 3.

12. **a)** .



b) .



c) $\left\{(x,y,z);\ 2 \leq x \leq 3,\ \sqrt{1-z} \leq y \leq \sqrt{4-z},\ 0 \leq z \leq 1\right\}$.

d) $\left\{(x,y,z);\ 0 \leq x \leq 2,\ x^2 \leq y \leq 2x,\ 0 \leq z \leq x+y\right\}$.

13. **a)** $\dfrac{128}{5}$.

b) $\dfrac{32}{3}$.

c) 2π.

14.

$$\begin{aligned} 6 &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 dzdydx = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 dzdxdy = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 dxdydz \\ &= \int_0^2 \int_0^3 \int_0^1 dxdzdy = \int_0^3 \int_0^1 \int_0^2 dydxdz = \int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 dydxdx. \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\, dzdydx = \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x,y,z)\, dzdxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x,y,z)\, dxdzdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)\, dydzdx = \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)\, dydxdz. \end{aligned}$$

16.

$$\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dydzdx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z}}\int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dydxdz$$
$$= \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{1-x^2} f(x,y,z)\,dzdxdy = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x^2} f(x,y,z)\,dzdydx$$
$$= \int_0^1\int_0^{1-\sqrt{1-z}}\int_0^{\sqrt{1-z}} f(x,y,z)\,dxdydz + \int_0^1\int_{1-\sqrt{1-z}}^1\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$= \int_0^1\int_0^{2y-y^2}\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dxdzdy + \int_0^1\int_{2y-y^2}^1\int_0^{\sqrt{1-z}} f(x,y,z)\,dxdzdy.$$

17. **a)** Massa: a^5; centro de massa: $\left(\frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}\right)$.

    b) Massa: $\frac{3a^4}{2}$; centro de massa: $\left(\frac{5a}{9}, \frac{5a}{9}, \frac{5a}{9}\right)$.

18. **a)** $\left(\frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}\right)$.

    b) $\left(1, \frac{4}{5}, 2\right)$.

19. $\frac{1}{12}$.

20. $I_x = I_y = I_z = \frac{2kL^5}{3}$.

21. $E = (\{(x,y,z);\ x^2+2y^2+3z^2 \leq 1\}$.

22. 16π.

23. Centróide: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $I_x = I_y = I_z = \frac{1}{30}$.

24. Centro de massa: $(0,4,0)$, $I_x = \frac{400}{3}$, $I_y = \frac{16}{3}$, $I_z = \frac{400}{3}$.

25. **a)** 6π.

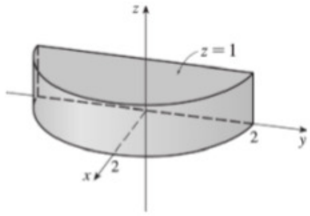
    b) $\sqrt{\frac{K}{3\pi}}$.

26. Para $(2, \pi/4, 1) : (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ e para $(4, -\pi/3, 5) : (2, -2\sqrt{3}, 5)$.

27. $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, 4)$.

28. $z = 4 - x^2 - y^2$, o parabolóide circular com vértice $(0,0,4)$.

29. .



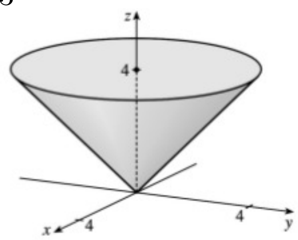
30. $6 \le r \le 7,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 20.$

31. **a)** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta.$

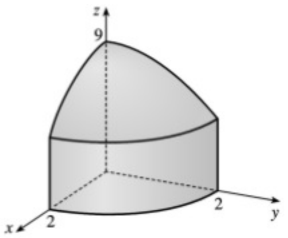
b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^1 r\,dr\,dz\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta.$

c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}}\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dz\,dr.$

32. **a)** $\dfrac{64\pi}{3}$; esboço:



b) 7π; esboço:



33. **a)** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2}^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta.$

b) 4π.

c) Região entre os parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$.

34. **a)** 384π.

b) 0.

c) $\dfrac{65\pi}{4}$.

d) $\dfrac{2\pi}{5}$.

e) 0.

f) 0.

35. **a)** 162π.

    b) $(0,0,15)$.

36. $\dfrac{7\pi}{6}$.

37. 12π.

38. **a)** $V = 2\displaystyle\int_0^h \int_{-\frac{R}{h}z}^{\frac{R}{h}z} \sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2 - x^2}\,dxdz.$

    b) Note que $\displaystyle\int_0^h \int_{-\frac{R}{h}z}^{\frac{R}{h}z} \sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2 - x^2}\,dxdz = \frac{\pi R^2 h}{6}$ é o volume da parte superior (ou inferior) do cone.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 3, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.

[4] E. W. Swokowski. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2^a Edição, Markron Books, 1995.