MA211 - Lista 07

Integrais Duplas em Coordenadas Polares e Aplicações

14 de outubro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Passe para coordenadas polares e calcule.

a) ([2], seção 4.2) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} xy\,dydx$

b) ([3], seção 12.3) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

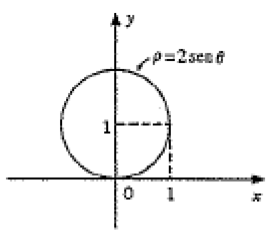
c) ★ ([2], seção 4.2) $\displaystyle\int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$, em que $a > 0$.

d) ([1], seção 15.4) $\displaystyle\iint_D x\,dA$, onde D é a região do primeiro quadrante compreendida entre os círculos $x^2+y^2 = 4$ e $x^2+y^2 = 2x$.

Solução:

a) Temos que a região de integração é

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} |\, 0 \le x \le 1 \,\text{e}\, 1-\sqrt{1-x^2} \le y \le 1+\sqrt{1-x^2}\}.$$



Passando para coordenadas polares temos que:

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ dy\,dx = r\,dr\,d\theta \end{cases}$$

Agora,

$$\begin{aligned} x^2+y^2 = 2y \quad &\Rightarrow \quad r^2\,\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\,\theta = 2r\,\text{sen}\,\theta \\ &\Rightarrow \quad r^2 = 2r\,\text{sen}\,\theta \\ &\Rightarrow \quad r(r-2\,\text{sen}\,\theta) = 0 \\ &\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 2\,\text{sen}\,\theta. \end{aligned}$$

Logo, $0 \leq r \leq 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. Então,

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} (r\,\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta\right]\Bigg|_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\,\mathrm{sen}\,\theta)^4}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^5\,\theta\,\cos\theta\,d\theta$$

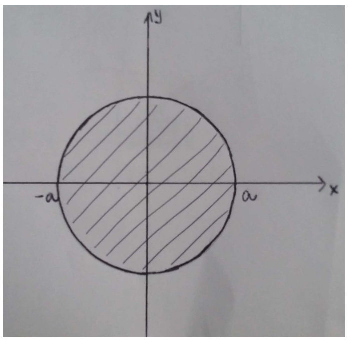
Tomando, $u = \mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow du = \cos\theta\,d\theta$ e sendo $\theta = 0 \Rightarrow u = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$. Assim,

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx = 4\int_0^1 u^5\,du$$

$$= 4 \cdot \frac{u^6}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

b) Temos que a região de integração é

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} |\, -a \leq x \leq a,\, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}.$$



Passando para coordenadas polares temos que

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dy\,dx = r\,dr\,d\theta \end{cases}$$

Como $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r^2\,\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}\,2\theta = a^2 \Rightarrow r^2 = a^2 \Rightarrow r = \pm a$. Como o raio deve ser sempre maior ou igual a zero, logo

$$0 \leq r \leq a \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

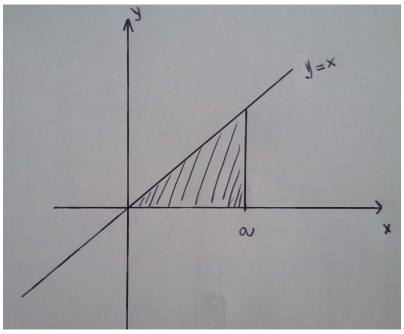
Então,

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{a} r\,dr$$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a} = (2\pi)\cdot\left(\frac{a^2}{2}\right) = a^2\pi.$$

c) Temos que a região de integração é:

$$R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\, 0\le x\le a,\, 0\le y\le x\}.$$



Passando para coordenadas polares temos que

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\operatorname{sen}\theta \\ dy\,dx = r\,dr\,d\theta \end{cases}$$

Como $0\le x\le a$, temos que $0\le r\le \dfrac{a}{\cos\theta}$ e também $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$. Então,

$$\int_0^{a}\int_0^{x}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}}\sqrt{r^2\,\cos^2\theta + r^2\,\operatorname{sen}^2\theta}\,r\,dr\,d\theta$$

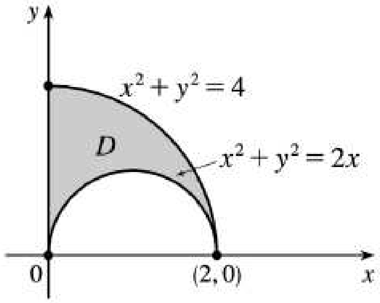
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} r^2\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\frac{a}{\cos\theta}} d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{2}\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\operatorname{tg}\theta|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{a^3}{6}\left[\left(\sec\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\ln\left|\sec\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right|\right) - \left(\sec 0\cdot\operatorname{tg}0+\ln|\sec 0+\operatorname{tg}0|\right)\right]$$

$$= \frac{a^3}{6}\left(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right)$$



d) A região R de integração é descrita na figura:

Notemos que $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$. Assim,

$$\iint_R x\,dA = \underbrace{\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 4\\ x\geq 0\\ y\geq 0}} x\,dA}_{(1)} - \underbrace{\iint_{\substack{(x-1)^2+y^2\leq 1\\ y\geq 0}} x\,dA}_{(2)}$$

Para a integral (1) temos em coordenadas polares que

$$r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2.$$

Logo, $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Para a integral (2) temos em coordenadas polares que

$$(r-\cos\theta - 1)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow r^2 - 2r\cos\theta = 0 \Rightarrow r(r-2\cos\theta) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 2\cos\theta.$$

Logo, $0 \leq r \leq 2\cos\theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Assim,

$$\iint_R x\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r\,\cos\theta\cdot r\,dr\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2\,\cos\theta\,dr\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\,d\theta\cdot\int_0^2 r^2\,dr - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\cos\theta\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \left(\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^2\right) - \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$$

$$= \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}0\right)\cdot\left(\frac{8}{3} - 0\right) - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\cos^3\theta\,\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{8}\theta + \frac{3}{16}\operatorname{sen}2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{8}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\cos^3\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{16}\,\mathrm{sen}\,2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\cos^3 0\,\mathrm{sen}\,0 + \frac{3}{8}\cdot 0 + \frac{3}{16}\,\mathrm{sen}\,0\right)\right]$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{16-3\pi}{6}.$$

2. ★ ([1], seção 15.4) Utilize coordenadas polares para combinar a soma

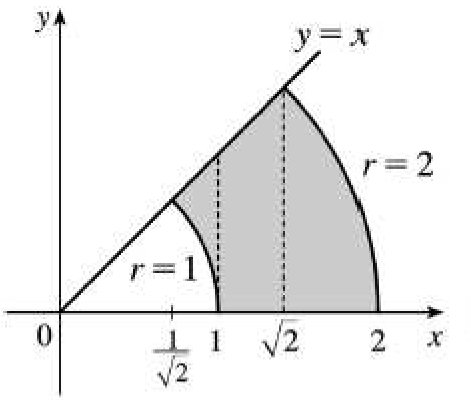
$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dydx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dydx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dydx$$

em uma única integral dupla. Em seguida, calcule essa integral dupla.

Solução: Queremos combinar a soma, abaixo, de integrais em uma única:

$$\underbrace{\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dydx}_{1} + \underbrace{\int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dydx}_{2} + \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dydx}_{3}$$

Na figura abaixo, temos que a região da esquerda corresponde a região de integração da integral (1), a região do meio corresponde a região de integração da integral (2) e a região da esquerda corresponde a região de integração da integral (3).



Notemos que com a junção das três regiões, podemos olhar como uma única região. Assim, em coordenadas polares teremos que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ e $1 \leq r \leq 2$. Então:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dydx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dydx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dydx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{1}^{2} (r\,\cos\theta)\cdot(r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{1}^{2} r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \,\operatorname{sen}\theta \, d\theta}_{\substack{u=\operatorname{sen}\theta \\ du=\cos\, d\theta}} \cdot \int_1^2 r^3 \, dr = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u \, du \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2$$

$$= \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{16}.$$

3. ♦ ([1], seção 15.5) Uma carga elétrica é distribuída sobre um disco $x^2+y^2 \leq 4$ de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total do disco.

   Solução: Como a carga elétrica é distribuída sobre o disco $x^2 + y^2 \leq 4$ em coordenadas polares temos que $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Temos que

$$Q = \iint\limits_D \sigma(x, y) \, dA = \iint\limits_D (x + y + x^2 + y^2) \, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r\,\cos\theta + r\,\operatorname{sen}\theta + r^2) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2\,\cos\theta + r^2\,\operatorname{sen}\theta + r^3) \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left.\left(\frac{r^3}{3}\cos\theta + \frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta + \frac{r^4}{4}\right)\right|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3}\cos\theta + \frac{8}{3}\operatorname{sen}\theta + 4\right) d\theta$$

$$= \left.\left(\frac{8}{3}\operatorname{sen}\theta - \frac{8}{3}\cos\theta + 4\theta\right)\right|_0^{2\pi} = \left(-\frac{8}{3} + 8\pi\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 8\pi + \frac{8}{3} = 8\pi.$$

4. ♦ ([1], seção 15.5) Considere uma pá quadrada de um ventilador com lados de comprimento 2 e com o canto inferior esquerdo colocado na origem. Se a densidade da pá for $\rho(x, y) = 1 + 0,1 \cdot x$, é mais difícil girar a pá em torno do eixo x ou do eixo y?

   Solução: Se calcularmos os momentos de inércia sobre x e y, poderemos determinar em qual direção será mais difíciel de girar a pá do ventilador. Notemos que a região de integração é o quadrado com lados de comprimento 2 e com o canto inferior esquerdo colocado na origem em ambas as integrais. Então, o momento de inércia sobre o eixo x é dada por:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x, y) \, dA = \int_0^2 \int_0^2 y^2(1 + 0,1x) dy dx$$

$$= \int_0^2 (1 + 0,1x) \, dx \cdot \int_0^2 y^2 \, dy = \left.\left(x + 0,1\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2 \cdot \left.\left(\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^2$$

$$= \Big[(2+0,2)-0\Big] \cdot \Big[\frac{8}{3}\Big] = \frac{17,6}{3}.$$

Da mesma forma, o momente de inércia sobre o eixo y é dado por:

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x,y)\, dA = \int_0^2 \int_0^2 x^2(1+0,1x)dydx$$

$$= \int_0^2 (x^2+0,1x^3)\, dx \cdot \int_0^2 dy = \left(\frac{x^3}{3} + 0,1\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 \cdot \Big(y\Big)\Big|_0^2$$

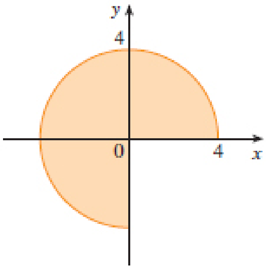
$$= \left[\left(\frac{8}{3}+0,4\right)-0\right] \cdot \Big[2-0\Big] = \frac{18,4}{3}.$$

Como $I_y > I_x$ é mais difícil girarmos a pá do ventilador em torno do eixo y.

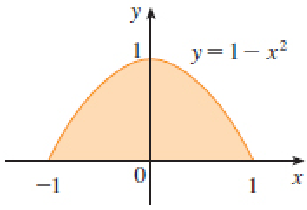
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ([1], seção 15.4) Uma região R é mostrada na figura. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares e escreva $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ como uma integral iterada, onde f é uma função qualquer contínua em R.

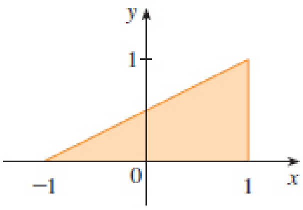
a)



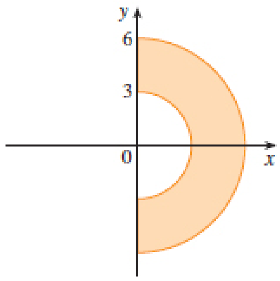
b)



c)



d)



6. ([1], seção 15.4) Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a.

   a) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\int_{4}^{7} r\,dr d\theta$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{4\cos\theta} r\,dr d\theta$

7. ♦ ([2], seção 4.2) ([5], seção 17.3) (Provas, 2013/2014) Calcule as integrais duplas usando coordenadas polares.

   a) $\displaystyle\iint\limits_R (x^2+2y)\,dxdy$, onde R é o círculo $x^2+y^2 \leq 4$.

   b) $\displaystyle\iint\limits_R (x^2+y^2)\,dxdy$, onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

   c) $\displaystyle\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\,dxdy$, onde R é o conjunto de todos os (x,y) tais que $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$, $-x \leq y \leq x$ e $x \geq 0$.

   d) $\displaystyle\iint\limits_R (x^2+y^2)^{3/2}\,dA$, onde R é limitado pelo círculo $x^2+y^2=4$.

   e) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dA$, onde R é a região anular limitada por $x^2+y^2=a^2$ e $x^2+y^2=b^2$, $0<a<b$.

f) $\displaystyle\iint\limits_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, onde R é limitado pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(3,0)$ e $(3,3)$.

g) $\displaystyle\iint\limits_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, onde R é limitado pelo círculo $y=\sqrt{2x-x^2}$ e pela reta $y=x$.

h) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{x}{x^2+y^2}\,dA$, onde $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 1\}$.

i) $\displaystyle\iint\limits_R y\,dA$, onde R é a região no primeiro quadrante limitada pelo semicírculo $x^2+y^2=2x$.

j) $\displaystyle\iint\limits_R \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dA$, onde R é a região acima do eixo x e dentro da circunferência $x^2+y^2=9$.

l) $\displaystyle\iint\limits_R \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\,dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2+y^2=25$.

8. ♦ ([2], seção 4.2) ([3], seção 12.3) ([1], seção 15.4) (Prova, 2014) Passe para coordenadas polares e calcule.

a) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{x-x^2}} x\,dydx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,dxdy$

e) $\displaystyle\int_0^6\int_0^y x\,dxdy$

f) $\displaystyle\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx$

g) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\int_0^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

h) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,dxdy$

i) $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

j) $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dydx$, em que $a>0$.

l) $\displaystyle\iint_R x\,dxdy$, onde R é a região, no plano xy, limitada pela curva (dada em coordenadas polares) $\rho=\cos(3\theta)$, $-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6}$.

m) $\displaystyle\iint_R dxdy$, onde R é a região, no plano xy, limitada pela curva (dada em coordenadas polares) $\rho=\cos(2\theta)$, $\dfrac{\pi}{8}\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$.

n) $\displaystyle\iint_R xy\,dxdy$, onde R é o círculo $x^2+y^2-2y\le 0$, $x\ge 0$.

o) $\displaystyle\iint_D xy\,dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 3.

p) $\displaystyle\iint_R \cos(x^2+y^2)\,dA$, onde R é a região acima do eixo do x e dentro da circunferência $x^2+y^2=9$.

q) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, onde D é a região delimitada pelo semicírculo $x=\sqrt{4-y^2}$ e o eixo y.

r) $\displaystyle\iint_R \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)dA$, onde $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le y\le x\}$.

9. ♦ (Prova, 2007) ([1], seção 15.4) ([3], seção 12.3) Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

   a) No interior do círculo $x^2+(y-1)^2=1$ e fora do círculo $x^2+y^2=1$.

   b) Um laço da rosácea $r=\cos(3\theta)$.

   c) ★ A região dentro da cardióide $r=1+\cos\theta$ e fora do círculo $r=3\cos\theta$.

   d) Cortada do primeiro quadrante pela curva $r=2(2-\operatorname{sen}(2\theta))^{1/2}$.

   e) Limitada pelo eixo x positivo e pela espiral $r=4\theta/3$, $0\le\theta\le 2\pi$. A região se parece com uma concha de caracol.

10. ♦ ([1], seção 15.4) ([5], seção 17.3) Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

    a) Abaixo do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e acima do disco $x^2+y^2\le 4$.

b) Delimitado pelo hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e acima do plano xy.

c) Dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

d) Uma esfera de raio a.

e) Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

f) Dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

g) ★ Delimitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

h) Delimitado pelo paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 5$.

11. ([1], seção 15.4) Calcule a integral iterada $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\, dydx$, convertendo-a antes para coordenadas polares.

12. ([1], seção 15.4) Uma piscina circular tem diâmetro de 10 metros. A profundidade é constante ao longo das retas de leste a oeste e cresce linearmente de 1 metro na extremidade sul para dois metros na extremidade norte. Encontre o volume de água da piscina.

13. (Teste, 2013) Ao calcular por integração dupla o volume V do sólido situado abaixo do gráfico de $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ e limitado inferiormente por uma certa região D no plano xy, chegou-se à seguinte expressão:

$$V = \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dydx - \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dydx.$$

a) Esboce a região D.

b) Expresse V numa única integral dupla em coordenadas polares.

c) Efetue a integração para calcular V.

14. ([3], seção 12.3) Use a integral dupla em coordenadas polares para deduzir a fórmula

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\, r^2\, d\theta$$

para a área da região em formato de leque entre a origem e a curva polar $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

15. ([3], seção 12.3) Suponha que a área de uma região no plano de coordenadas polares seja

$$A = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{\operatorname{cosec}\theta}^{2\operatorname{sen}\theta} r\, drd\theta.$$

Esboce a região e encontre sua área.

16. (Teste, 2013) Considere a integral dada em coordenadas polares por

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\theta} r\, drd\theta,$$

a qual representa a área de uma região R do plano xy.

a) Escreva a região R em coordenadas cartesianas.

b) Faça um esboço da região R.

c) Calcule a área da região R.

17. ([1], seção 15.4)

a) Definimos a integral imprópria (sobre todo o plano $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dydx = \lim_{a\to\infty} \iint\limits_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA,$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \pi.$$

b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte **(a)** é

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \lim_{a\to\infty} \iint\limits_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA,$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esse resultado para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \pi.$$

c) Deduza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

(Esse é um resultado fundamental em probabilidade e estatística.)

18. ([1], seção 15.4) Utilize o resultado do exercício acima, parte **(c)**, para calcular as integrais.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x}\, dx$

19. ([1], seção 15.5) Uma carga elétrica é distribuída sobre o retângulo $1 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$, de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = 2xy + y^2$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no retângulo.

20. ♦ ([1], seção 15.5) Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem função densidade ρ.

   a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 1\}$; $\quad \rho(x, y) = xy^2$.

   b) D é a região triangular com vértices $(0, 0), (2, 1), (0, 3)$; $\rho(x, y) = x + y$.

   c) D é a região triangular delimitada pelas retas $x = 0$, $y = x$ e $2x + y = 6$; $\quad \rho(x, y) = x^2$.

   d) D é delimitada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$; $\quad \rho(x, y) = y$.

   e) ★ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \operatorname{sen}(\pi x/L),\ 0 \leq x \leq L\}$; $\quad \rho(x, y) = y$.

   f) D é delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$; $\quad \rho(x, y) = \sqrt{x}$.

21. ([1], seção 15.5) Determine os momentos de inércia para a lâmina da letra d) do exercício acima.

22. ([2], seção 4.3) Calcule o centro de massa.

   a) D é o quadrado $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$; $\quad \rho(x, y) = y$.

   b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ e a densidade é proporcional à distância do ponto ao eixo x.

   c) D o triângulo de vértices $(0, 0), (0, 1)$ e $(1, 1)$ e a densidade é proporcional à distância do ponto à origem.

   d) D é o conjunto de todos (x, y) tais que $x^3 \leq y \leq x$ e a densidade é constante e igual a 1.

   e) D é o conjunto de todos (x, y) tais que $x \leq y \leq x + 1$, $0 \leq x \leq 1$, e a densidade é o produto das coordenadas do ponto.

   f) D é o conjunto de todos (x, y) tais que $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$, e a densidade é proporcional à distância do ponto à origem.

23. ([1], seção 15.5) Uma lâmina ocupa parte do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ no primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x.

24. ([1], seção 15.5) A fronteira de uma lâmina consiste nos semicírculos $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = \sqrt{4 - x^2}$, juntamente com as partes do eixo x que os une. Encontre o centro de massa da lâmina se a densidade em qualquer ponto é proporcional à sua distância da origem.

25. ([1], seção 15.5) Encontre o centro de massa de uma lâmina em forma de triângulo retângulo isósceles, com os lados iguais tendo comprimento a, se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do vértice oposto à hipotenusa.

26. ([1], seção 15.5) A função densidade conjunta para um par de variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx(1+y), & \text{se } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Determine a constante C.

b) Determine $P(X \leq 1,\ Y \leq 1)$.

c) Determine $P(X + Y \leq 1)$.

27. ([1], seção 15.5)

a) Verifique que

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{se } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é uma função densidade conjunta.

b) Se X e Y são variáveis aleatórias cuja função densidade conjunta é a função f da letra **(a)**, determine
(i) $P(X \geq \frac{1}{2})$, **(ii)** $P(X \geq \frac{1}{2},\ Y \leq \frac{1}{2})$.

c) Determine os valores esperados de X e Y.

28. ([1], seção 15.5)

a) Uma luminária tem duas lâmpadas de um tipo com tempo de vida médio de 1.000 horas. Supondo que possamos modelar a probabilidade de falha dessas lâmpadas por uma função densidade exponencial com média $\mu = 1.000$, determine a probabilidade de que ambas as lâmpadas venham a falhar dentro de um período de 1.000 horas.

b) Outra luminária tem somente uma lâmpada do mesmo tipo das da letra **(a)**. Se a lâmpada queima e é trocada por outra to mesmo tipo, determine a probabilidade de que as duas venham a falhar dentro de 1.000 horas.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

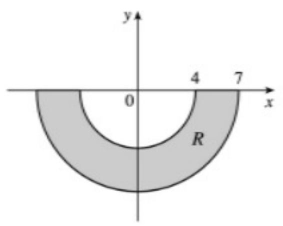
5. **a)** $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^4 f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))r\ drd\theta.$

   b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} f(x,y)\ dydx.$

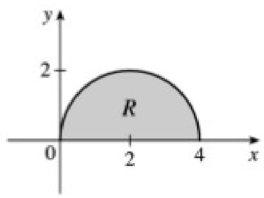
   c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{\frac{(x+1)}{2}} f(x,y)\ dydx.$

   d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_3^6 f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))r\ drd\theta.$

6. **a)** $\dfrac{33\pi}{2}$; região de integração:



   b) 2π; região de integração:



7. **a)** 4π.

   b) $\dfrac{15\pi}{2}$.

   c) $\dfrac{\pi}{4}(e^4 - e)$.

   d) $\dfrac{64\pi}{5}$.

   e) $\dfrac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$.

   f) $\dfrac{9}{2}(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1))$.

   g) $\dfrac{8}{9}(2 - \dfrac{5}{4}\sqrt{2})$.

   h) $2\sqrt{3}$.

   i) $\dfrac{2}{3}$.

j) $\frac{\pi}{2}(1-\cos(9)$.

l) $\frac{25\pi^2}{16}$.

8. **a)** $\frac{2}{45}(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

   b) $\frac{\pi}{16}$.

   c) $\frac{\pi}{2}$.

   d) $\frac{\pi}{8}$.

   e) 36.

   f) $(1-\ln(2))\pi$.

   g) $\frac{\pi(2\ln(2)-1)}{2}$.

   h) $\pi(\ln(4)-1)$.

   i) $\frac{\pi a^2}{4}$.

   j) $\frac{\pi a^3}{6}$.

   l) $\frac{81\sqrt{3}}{320}$.

   m) $\frac{3\pi+2}{32}$.

   n) $\frac{2}{3}$.

   o) 0.

   p) $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}(9)$.

   q) $\frac{\pi}{2}(1-e^{-4})$.

   r) $\frac{3\pi^2}{64}$.

9. **a)** $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   b) $\frac{\pi}{12}$.

   c) $\frac{\pi}{4}$.

   d) $2(\pi-1)$.

   e) $\frac{64\pi^3}{27}$.

10. **a)** $\dfrac{16\pi}{3}$.

 b) $\dfrac{4\pi}{3}$.

 c) $32\sqrt{3}\pi$.

 d) $\dfrac{4\pi}{3}a^3$.

 e) $\dfrac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})$.

 f) $\dfrac{8\pi}{3}(64-24\sqrt{3})$.

 g) $\dfrac{8}{9}$.

 h) 8π.

11. $\dfrac{\pi}{2}(1-\cos(9))$.

12. 1800π m^3.

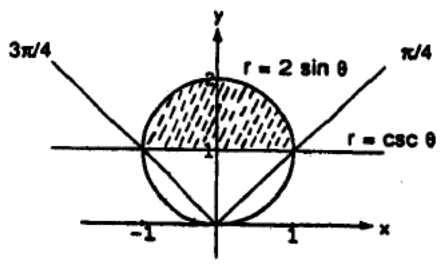
13. **a)** $D = \{(x,y);\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

 b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 re^{r^2}\,drd\theta.$

 c) $\dfrac{\pi}{4}(e^4-1)$.

14. Note que $A = \displaystyle\int_\alpha^\beta\int_0^{f(\theta)} r\,drd\theta.$

15. $A = \dfrac{\pi}{2}$; região:



.

16. **a)** $R = \{(x,y);\ (x-1)^2+y^2 \leq 1, \quad x \leq y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$.

 c) $\dfrac{\pi+2}{4}$.

17. **a)** Note que

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^a re^{-r^2}\,drd\theta = \pi(1-e^{-a^2})$$

 para cada a.

b) Note que

$$\int\limits_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}\, dxdy = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-a}^{a} e^{-y^2}dy\right)$$

para cada a.

c) Troque y por x no item (b).

d) Note que fazendo a mudança de variável sugerida,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{\pi}.$$

18. **a)** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$.

b) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

19. $\dfrac{64}{3}$ coulombs.

20. **a)** Massa: $\dfrac{4}{3}$; centro de massa: $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$.

b) Massa: 6; centro de massa: $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{2}\right)$.

c) Massa: 4; centro de massa: $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$.

d) Massa: $\dfrac{1}{4}(e^2-1)$; centro de massa: $\left(\dfrac{e^2+1}{2(e^2-1)}, \dfrac{4(e^3-1)}{9(e^2-1)}\right)$.

e) Massa: $\dfrac{L}{4}$; centro de massa: $\left(\dfrac{L}{2}, \dfrac{16}{9\pi}\right)$.

f) Massa: $\dfrac{3}{14}$; centro de massa: $\left(\dfrac{14}{27}, \dfrac{28}{55}\right)$.

21. $I_x = \dfrac{1}{16}(e^4-1)$, $I_y = \dfrac{1}{16}(e^4-1)$ e $I_0 = \dfrac{1}{16}(e^4+2e^2-3)$.

22. **a)** $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$.

b) $\left(0, \dfrac{3\pi}{32}\right)$.

c) $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+2\ln(1+\sqrt{2})}\right)$.

d) $(0, 0)$.

e) $\left(\frac{5}{7}, \frac{9}{7}\right)$.

f) $\left(0, \frac{45}{14\pi}\right)$.

23. $\left(\frac{3}{8}, \frac{3\pi}{16}\right)$.

24. $\left(0, \frac{45}{14\pi}\right)$.

25. $\left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$.

26. **a)** $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{3}{8}$.

c) $\frac{5}{48}$.

27. **a)** Note que
$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dA = \int_0^1 \int_0^1 4xy\; dydx = 1.$$

b) **(i)** $\frac{3}{4}$. **(ii)** $\frac{3}{16}$.

c) $\frac{3}{16}$.

28. **a)** $(e^{-1}-1)^2$.

b) $1-2e^{-1}$.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 3, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.

[4] C. H. Edwards Jr; D. E. Penney. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 2 e 3, Prentice Hall do Brasil, 1997.

[5] E. W. Swokowski. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2^a Edição, Markron Books, 1995.