MA211 - Lista 06

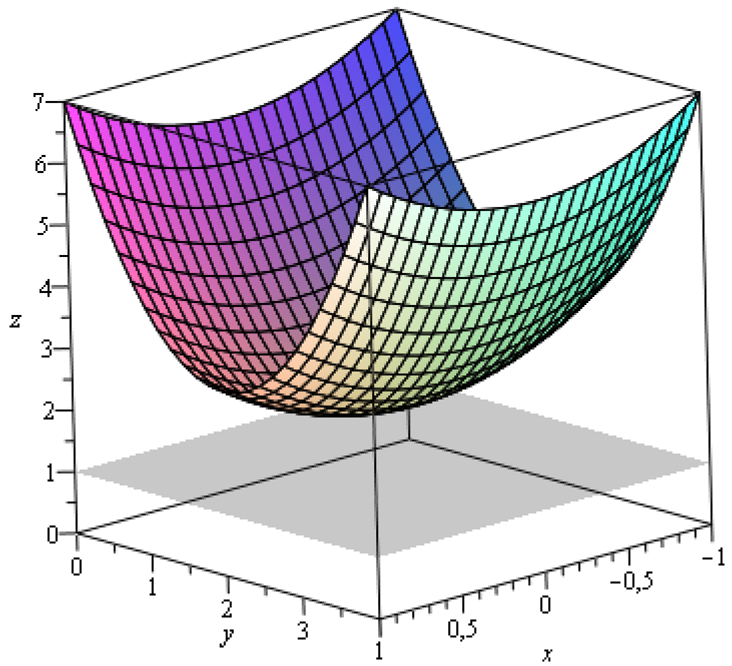
Integrais Duplas Sobre Retângulos, Integrais Iteradas e Integrais Duplas Sobre Regiões Gerais

5 de outubro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ([1], seção 15.2) Encontre o volume do sólido delimitado pelo paraboloide $z = 2 + x^2 + (y-2)^2$ e pelos planos $z = 1$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ e $y = 4$.

   Solução: Observe que o sólido E está abaixo da superfície $z = 2+x^2+(y-2)^2$ e acima do retângulo $[-1,1] \times [0,4]$ em $z = 1$ (ver figura abaixo).



   Algebricamente,

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 4 \text{ e } 1 \le z \le 2 + x^2 + (y-2)^2\}.$$

   Logo, o volume é dado por

$$V = \iint_R (2 + x^2 + (y-2)^2)\, dA - \iint_R dA,$$

em que $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 4\}$. Assim,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{4} (x^2 + y^2 - 4y + 5)\, dydx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} - 2y^2 + 5y \Big|_{y=0}^{y=4} \right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(4x^2 + \frac{28}{3} \right) dx \\ &= \frac{4x^3}{3} + \frac{28x}{3} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Observe que, pelo Teorema de Fubini, podemos optar por calcular a integral

$$\int_{0}^{4}\int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 - 4y + 5)\, dydx,$$

obtendo o mesmo resultado.

2. ♦ ([1], seção 15.3) Determine o volume do sólido limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$.

Solução: O sólido cujo volume deve ser calculado é

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in R \text{ e } 0 \le z \le 6 - 3x - 2y\},$$

em que R é a projeção de E no plano xy. Assim, o volume é dado por

$$V = \iint\limits_R (6 - 3x - 2y)\, dA.$$

A região R é tanto do tipo I como do tipo II, então é possível escrevê-la de pelo menos duas formas. Escrevendo como uma região do tipo I, obtemos:

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \text{ e } 0 \le y \le \frac{6 - 3x}{2} \right\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \int_{0}^{2}\int_{0}^{\frac{6-3x}{2}} (6 - 3x - 2y)\, dydx \\ &= \int_{0}^{2} \left(6y - 3xy - y^2 \Big|_{y=0}^{y=\frac{6-3x}{2}} \right) dx \\ &= \int_{0}^{2} \left(9 - 9x + \frac{9x^2}{4} \right) dx \\ &= 9x - \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{12} \Big|_{x=0}^{x=2} = 6. \end{aligned}$$

Observe que podemos escrever R como uma região do tipo II, obtendo:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{6 - 2y}{3} \text{ e } 0 \leq y \leq 3\right\}.$$

Então, uma outra expressão para V é

$$V = \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2y}{3}} (6 - 3x - 2y)\, dxdy = 6.$$

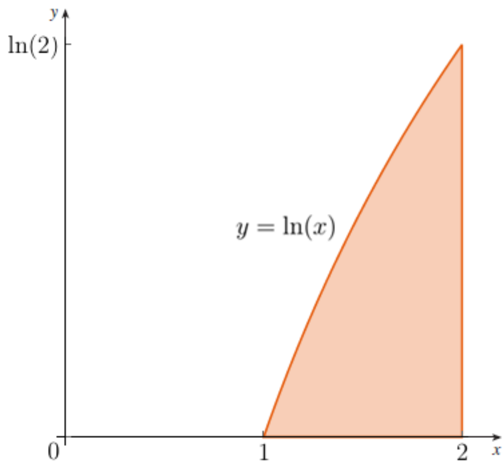
3. ♦ ([1], seção 15.3) Esboce a região de integração e mude a ordem de integração.

$$\int_1^2 \int_0^{\ln(x)} f(x, y)\, dydx$$

Solução: Note que a região de integração é do tipo I, é dada por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \ln(x)\}$$

e pode ser vista geometricamente como a região esboçada na figura abaixo.



Além disso, ela pode ser descrita como uma região do tipo II da seguinte forma:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^y \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \ln 2\}.$$

Portanto, a integral pode ser reescrita como $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} f(x, y)\, dxdy$.

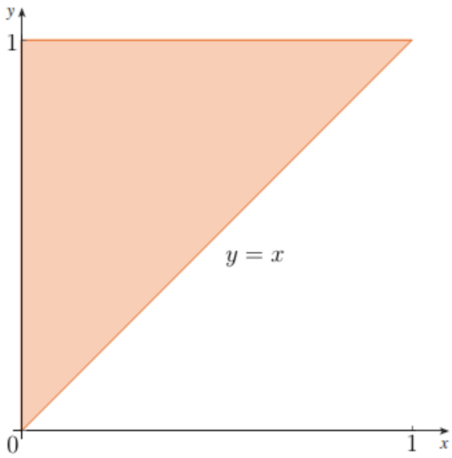
4. ♦ ([1], seção 15.3) Calcule a integral trocando a ordem de integração.

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\, dydx$$

Solução: A região de integração é do tipo I, é dada por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x \leq y \leq 1\}$$

e pode ser vista geometricamente como a região esboçada na figura abaixo.



Essa região pode ser descrita como uma região do tipo II da seguinte forma:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\, dydx &= \int_0^1 \int_0^y e^{x/y}\, dxdy \\
&= \int_0^1 ye^{x/y}\Big|_{x=0}^{x=y}\, dx \\
&= \int_0^1 y(e-1)\Big|_{x=0}^{x=y}\, dx \\
&= (e-1)\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{e-1}{2}.
\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ([1], seção 15.1)

   a) Estime o volume do sólido que está abaixo da superfície $z = x + 2y^2$ e acima do retângulo $R = [0, 2] \times [0, 4]$. Use a soma de Riemann com $m = n = 2$ e escolha os pontos amostrais como os cantos inferiores direitos.

   b) Use a Regra do Ponto Médio para dar uma estimativa da integral do item **(a)**.

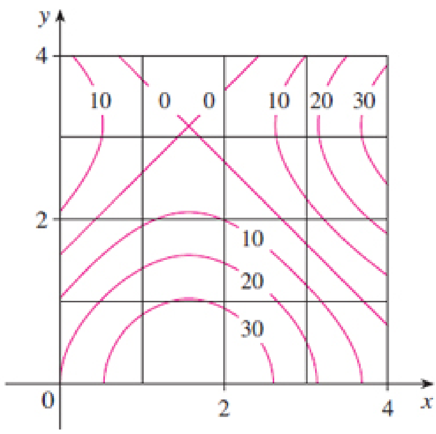
6. ([1], seção 15.1) Uma piscina de 8 por 12 metros está cheia de água. A profundidade é medida em intervalos de 2 metros, começando em um canto da piscina, e os valores foram registrados na tabela. Estime o volume de água na piscina.

	0	2	4	6	8	10	12
0	1	1,5	2	2,4	2,8	3	3
2	1	1,5	2	2,8	3	3,6	3
4	1	1,8	2,7	3	3,6	4	3,2
6	1	1,5	2	2,3	2,7	3	2,5
8	1	1	1	1	1,5	2	2

7. ([1], seção 15.1) A figura mostra o mapa de contorno de f no quadrado $R = [0, 4] \times [0, 4]$.

   a) Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$.

   b) Estime o valor médio de f.



8. ([1], seção 15.1) Calcule a integral dupla, identificando-a antes com o volume de um sólido.

a) $\displaystyle\iint_R 3\,dA, \quad R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 6\}.$

b) $\displaystyle\iint_R (4-2y)\,dA, \quad R = [0,1] \times [0,1].$

9. ⧫ ([1], seção 15.1) A integral $\iint_R \sqrt{9-y^2}\,dA$, em que $R = [0,4] \times [0,2]$, representa o volume de um sólido. Esboce o sólido.

10. ([1], seção 15.1) Se f é uma função constante, $f(x,y) = k$, e $R = [a,b] \times [c,d]$, mostre que $\iint_R k\,dA = k(b-a)(d-c)$.

11. ([1], seção 15.2) Determine $\int_0^5 f(x,y)\,dx$ e $\int_0^1 f(x,y)\,dy$, sendo $f(x,y) = 12x^2y^3$.

12. ⧫ ([1], seção 15.2) Calcule a integral iterada.

a) $\displaystyle\int_1^3\int_0^1 (1+4xy)\,dxdy$

b) $\displaystyle\int_2^4\int_{-1}^1 (x^2+y^2)\,dydx$

c) ★ $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos y\,dydx$

d) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (2x+y)^8\,dxdy$

e) $\displaystyle\int_1^4\int_1^2 \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)dydx$

f) $\displaystyle\int_0^1\int_0^3 e^{x+3y}\,dxdy$

g) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (u-v)^5\,dudv$

h) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\pi} r\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta dr$

13. ⧫ ([2], seção 3.1) Seja R o retângulo $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$. Calcule $\iint_R f(x,y)\,dxdy$, sendo $f(x,y)$ igual a

a) $x+2y$

b) $x-y$

c) $\sqrt{x+y}$

d) $\dfrac{1}{x+y}$

e) 1

f) $x\cos(xy)$

g) $y\cos(xy)$

h) $x\operatorname{sen}(\pi y)$

i) ye^{xy}

j) xy^2

l) $\dfrac{1}{(x+y)^2}$

m) $\dfrac{1}{1+x^2+2xy+y^2}$

14. ⧫ ([1], seção 15.2) Calcule a integral dupla.

a) $\displaystyle\iint_R (6x^2y^3-5y^4)\,dA, \quad R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1\}.$

b) $\displaystyle\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\,dA, \quad R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ -3 \leq y \leq 3\}.$

c) $\displaystyle\iint\limits_R x\,\mathrm{sen}(x+y)\,dA, \quad R=[0,\pi/6]\times[0,\pi/3].$

d) $\displaystyle\iint\limits_R xye^{x^2y}\,dA, \quad R=[0,1]\times[0,2].$

15. ([2], seção 3.1) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções contínuas, respectivamente, nos intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$. Prove que

$$\iint\limits_R f(x)g(y)\,dxdy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right),$$

onde R é o retângulo $a\le x\le b$ e $c\le y\le d$.

16. ([2], seção 3.1) Usando o Exercício 15, calcule

a) $\displaystyle\iint\limits_R xy^2\,dxdy$, onde R é o retângulo $1\le x\le 2,\ 2\le y\le 3$.

b) $\displaystyle\iint\limits_R x\cos(2y)\,dxdy$, onde R é o retângulo $0\le x\le 1,\ -\dfrac{\pi}{4}\le y\le\dfrac{\pi}{4}$.

c) $\displaystyle\iint\limits_R x\ln(y)\,dxdy$, onde R é o retângulo $0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2$.

d) $\displaystyle\iint\limits_R xye^{x^2-y^2}\,dxdy$, onde R é o retângulo $-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 3$.

e) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{\mathrm{sen}^2\,x}{1+4y^2}\,dxdy$, onde R é o retângulo $0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\dfrac{1}{2}$.

f) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{xy\,\mathrm{sen}\,x}{1+4y^2}\,dxdy$, onde R é o retângulo $0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le 1$.

17. ([2], seção 3.1) ♦ Calcule o volume do conjunto dado.

a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le x+2y\}$

b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ 0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le\sqrt{xy}\}$

c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le xye^{x^2-y^2}\}$

d) ★ $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x^2+y^2\le z\le 2\}$

e) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\ x+y\le z\le x+y+2\}$

f) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 1\le z\le e^{x+y}\}$

18. ([1], seção 15.2) Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada
$$\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\, dxdy.$$

19. ([1], seção 15.2) Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano $3x + 2y + z = 12$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq 3\}$.

20. ([1], seção 15.2) Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

21. ♦ ([1], seção 15.2) Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 16 - x^2$ e pelo plano $y = 5$.

22. ([1], seção 15.2) Determine o valor médio de $f(x, y) = e^y\sqrt{x + e^y}$ sobre o retângulo
$R = [0, 4] \times [0, 1]$.

23. ([1], seção 15.3) Calcule as integrais iteradas.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y)\, dydx$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 + 2y)\, dydx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} e^{\operatorname{sen}\theta}\, drd\theta$ **c)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{v} \sqrt{1 - v^2}\, dudv$

24. ♦ ([5], seção 17.1) Esboce a região de integração para a integral iterada.

a) $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} f(x, y)\, dydx$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3\sqrt{y}} f(x, y)\, dxdy$

c) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \int_{\operatorname{sen} y}^{\ln(y)} f(x, y)\, dxdy$

25. ([3], seção 12.1) Esboce a região de integração e calcule a integral.

a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^2 (4 - y^2)\, dydx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{x} x \operatorname{sen} y\, dydx$

c) $\displaystyle\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y - 2xy)\, dydx$ **d)** $\displaystyle\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\, dxdy$

e) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x + \cos y)\, dxdy$ **f)** $\displaystyle\int_1^2 \int_y^{y^2} dxdy$

26. ★ (Prova, 2014) Calcule $\int_0^1 \int_x^1 3y^4 \cos(xy^2)\, dydx$. Esboce a região de integração.

27. ([5], seção 17.1) Expresse a integral dupla, sobre a região R indicada, como uma integral iterada e ache seu valor.

a) $\displaystyle\iint_R (y+2x)\,dA$; R região retangular de vértices $(-1,-1)$, $(2,-1)$, $(2,4)$ e $(-1,4)$.

b) $\displaystyle\iint_R (x-y)\,dA$; R região triangular de vértices $(2,9)$, $(2,1)$ e $(-2,1)$.

c) $\displaystyle\iint_R xy^2\,dA$; R região triangular de vértices $(0,0)$, $(3,1)$ e $(-2,1)$.

d) $\displaystyle\iint_R e^{x/y}\,dA$; R região limitada pelos gráficos de $y=2x$, $y=-x$ e $y=4$.

28. ([1], seção 15.3)([3], seção 12.1) Calcule a integral dupla.

a) $\displaystyle\iint_D x^3y^2\,dA,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\le x\le 2,\ -x\le y\le x\}.$

b) $\displaystyle\iint_D x\,dA,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \operatorname{sen} x\}.$

c) $\displaystyle\iint_D x^3\,dA,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 1\le x\le e,\ 0\le y\le \ln(x)\}.$

d) $\displaystyle\iint_D y^2e^{xy}\,dA,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\le y\le 4,\ 0\le x\le y\}.$

e) $\displaystyle\iint_D y^3\,dA$, D região com vértices $(0,2)$, $(1,1)$ e $(3,2)$.

f) $\displaystyle\iint_D (2x-y)\,dA$, D limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2.

g) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y}\,dA$, D região no primeiro quadrante limitada pelas retas $y=x$, $y=2x$, $x=1$ e $x=2$.

h) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{xy}\,dA$, D o quadrado $1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2$.

i) $\displaystyle\iint_D (x-\sqrt{y})\,dA$, D região triangular cortado do primeiro quadrante do plano xy pela reta $x+y=1$.

29. (Prova, 2006) Calcule a área limitada pelas curvas $x=y^2-1$ e $x=2y^2-2$.

30. ♦ ([1], seção 15.3) ([3], seção 12.1) Determine o volume do sólido.

a) Abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

b) Abaixo do paraboloide $z = 3x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x$ e $x = y^2 - y$.

c) ★ Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$.

e) Limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$, no primeiro octante.

f) Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$, no primeiro octante.

g) Cuja base é a região no plano xy que é limitada pela parábola $y = 4 - x^2$ e pela reta $y = 3x$, enquanto o topo do sólido é limitado pelo plano $z = x + 4$.

h) No primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano $z + y = 3$.

31. ([1], seção 15.3) Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dydx.$$

32. ♦ ([1], seção 15.3) Esboce a região de integração e mude a ordem de integração.

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dydx$

b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dxdy$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\operatorname{arctg} x}^{\pi/4} f(x, y)\, dydx$

33. (Prova, 2010) Considere a integral iterada dada por

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^y}{y}\, dydx.$$

a) Desenhe a região de integração no plano xy.

b) Calcule a integral acima.

34. ♦ ([1], seção 15.3) ([3], seção 12.1) Calcule a integral trocando a ordem de integração.

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1}\, dydx$

d) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \operatorname{sen}(xy)\, dydx.$

c) $\displaystyle\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dydx$

35. ([1], seção 15.3) No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D, obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que segue:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\,dxdy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)\,dxdy.$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.

36. (Teste, 2013) Considere a integral

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 y e^{x^3}\,dxdy.$$

a) Faça um esboço da região de integração.

b) Calcule a integral sendo explícito se vai precisar mudar a ordem de integração.

37. ★ (Teste, 2013) Ao calcular por integração dupla o volume V do sólido situado abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e limitado inferiormente por uma certa região D no plano xy, chegou-se à seguinte expressão:

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2+y^2)\,dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2+y^2)\,dxdy.$$

a) Esboce a região D.

b) Expresse V numa única integral dupla iterada.

c) Efetue a integração para calcular V.

38. (Prova, 2008) Considere a integral

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \operatorname{sen} y^3\,dydx.$$

a) Desenhe a região de integração.

b) Calcule o valor da integral.

39. (Teste, 2013) Considere a integral

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dxdy.$$

a) Esboce a região de integração.

b) Calcule a integral usando a ordem de integração apropriada.

40. (Prova, 2010) Escreva a integral dupla

$$\iint_R x \cos y \, dA,$$

onde R é limitada pelas retas $y = 0$, $x = \pi/4$ e $y = x$, das duas formas possíveis (mudando a ordem de integração). Escolha uma dessas formas e calcule o valor dessa integral.

41. (Prova, 2006,2007) Inverta a ordem de integração, integrando primeiro em y e depois em x para calcular a integral:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\, dx dy$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}} \operatorname{sen} x^3 \, dx dy$

42. ([1], seção 15.3) Utilize simetria para calcular $\iint_D (2 - 3x + 4y)\, dA$, onde D é a região limitada pelo quadrado com vértices $(\pm 5, 0)$ e $(0, \pm 5)$.

43. ([2], seção 3.1) Calcule $\iint_B y \, dx dy$, onde B é o conjunto dado.

a) B é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x+2\}$.

c) B é o conjunto de todos (x,y) tais que $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

d) B é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(2,1)$.

e) B é a região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$.

f) B é o paralelogramo de vértices $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

g) B é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$.

h) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x \geq 0, \ x^5 - x \leq y \leq 0\}$.

44. ([2], seção 3.1) Calcule $\iint_B f(x,y)\, dx\, dy$ sendo dados:

a) $f(x,y) = x \cos y$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x \geq 0, \ x^2 \leq y \leq \pi\}$.

b) $f(x,y) = xy$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 \leq 2, \ y \leq x \ e \ x \geq 0\}$.

c) $f(x,y) = x$ e B o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,0)$.

d) $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y^2}$ e B o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

e) $f(x,y) = x+y$ e B o paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,1)$ e $(2,0)$.

f) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(y)}$ e $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ 2 \leq y \leq 3, \ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{y}\right\}$.

g) $f(x,y) = xy\cos x^2$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$.

h) $f(x,y) = \cos(2y)\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2 x}$ e B é o triângulo de vértices $(0,0)$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

i) $f(x,y) = x + y$ e B a região compreendida entre os gráficos das funções $y = x$ e $y = e^x$, com $0 \le x \le 1$.

j) $f(x,y) = y^3 e^{xy^2}$ e B o retângulo $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$.

l) $f(x,y) = x^5 \cos y^3$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y \ge x^2,\ x^2 + y^2 \le 2\}$.

m) $f(x,y) = x^2$ e B o conjunto de todos (x,y) tais que $x \le y \le -x^2 + 2x + 2$.

n) $f(x,y) = x$ e B a região compreendida entre os gráficos de $y = \cos x$ e $y = 1 - \cos x$, com $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

o) $f(x,y) = 1$ e B a região compreendida entre os gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 1 - \cos x$, com $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

p) $f(x,y) = \sqrt{1 + y^3}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \sqrt{x} \le y \le 1\}$.

q) $f(x,y) = x$ e B é o conjunto de todos (x,y) tais que $y \ge x^2$ e $x \le y \le x + 2$.

r) $f(x,y) = \dfrac{y}{x + y^2}$ e B o conjunto de todos (x,y) tais que $1 \le x \le 4$ e $0 \le y \le \sqrt{x}$.

45. ♦ ([2], seção 3.1) Inverta a ordem de integração.

a) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_0^x f(x,y)\,dy\right]dx$

b) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{x^2}^x f(x,y)\,dy\right]dx$

c) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right]dy$

d) $\displaystyle\int_1^e\left[\int_{\ln(x)}^x f(x,y)\,dy\right]dx.$

e) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_y^{y+3} f(x,y)\,dx\right]dy$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right]dx$

g) $\displaystyle\int_{-1}^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\right]dx$

h) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{y-1}^{2-2y} f(x,y)\,dx\right]dy$

i) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{x^2}^1 f(x,y)\,dy\right]dx$

j) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{e^{y-1}}^{e^y} f(x,y)\,dx\right]dy$

l) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{2x}^{x+1} f(x,y)\,dy\right]dx$

m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^{\mathrm{tg}(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$

n) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\right]dx$

o) $\displaystyle\int_0^{3a}\left[\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\sqrt{4ax-x^2}} f(x,y)\,dy\right]dx,\ a>0.$

p) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left[\int_0^{\operatorname{sen}x} f(x,y)\,dy\right]dx$

q) $\displaystyle\int_0^{\dfrac{\pi}{4}}\left[\int_{\operatorname{sen}x}^{\cos x} f(x,y)\,dy\right]dx$

r) $\displaystyle\int_{-1}^2\left[\int_{\sqrt{\frac{7+5y^2}{3}}}^{\frac{y+7}{3}} f(x,y)\,dx\right]dy$

s) $\displaystyle\int_0^3\left[\int_{x^2-2x}^{\sqrt{3x}} f(x,y)\,dy\right]dx$

46. ♦ ([2], seção 3.1) Calcule o volume do conjunto dado.

a) $x^2+y^2\le 1$ e $x+y+2\le z\le 4$.

b) $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le 1$ e $0\le z\le x^2+y^2$.

c) $0\le y\le 1-x^2$ e $0\le z\le 1-x^2$.

d) $x^2+y^2+3\le z\le 4$.

e) $x^2+4y^2\le 4$ e $x+y\le z\le x+y+1$.

f) $x\ge 0$, $x\le y\le 1$ e $0\le z\le e^{y^2}$.

g) $x^2+y^2\le a^2$ e $y^2+z^2\le a^2$, $a>0$.

h) $x^2+y^2\le z\le 1-x^2$.

i) $x+y+z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ e $z\ge 0$.

j) $x\le y\le 1$, $x\ge 0$, $z\ge 0$ e $z^2+x^4+x^2y^2\le 2x^2$.

l) $x^2+y^2\le z\le 2x$.

m) $x\le z\le 1-y^2$ e $x\ge 0$.

n) $4x+2y\ge z\ge 3x+y+1$, $x\ge 0$ e $y\ge 0$.

o) $0\le z\le \operatorname{sen}y^3$ e $\sqrt{x}\le y\le \sqrt[3]{\pi}$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. **a)** ≈ 44.

   b) ≈ 88.

6. ≈ 227.

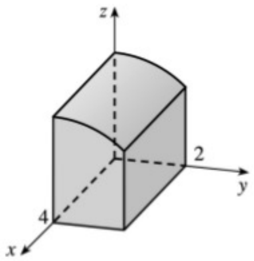
7. **a)** ≈ 248.

   b) $\approx 15,5$.

8. **a)** 60.

   b) 3.

9. .



10. Note que se R for dividida em mn subretângulos, vale

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = k\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Delta A = k(b-a)(d-c),$$

independente dos pontos amostrais (x_{ij}^*, y_{ij}^*) escolhidos.

11. $\int_0^5 12x^2y^3\,dx = 500y^3$ e $\int_0^1 12x^2y^3\,dy = 3x^2$.

12. **a)** 10.

    b) $\dfrac{116}{3}$.

    c) 2.

    d) $\dfrac{4^{10}-2^{11}}{180}$.

    e) $\dfrac{21}{2}\ln(2)$.

    f) $\dfrac{(e^3-1)^2}{3}$.

    g) 0.

    h) π.

13. **a)** $\dfrac{5}{2}$.

b) 1.

c) $\dfrac{4(9\sqrt{3}-8\sqrt{2}+1)}{15}$.

d) $\ln\left(\dfrac{27}{16}\right)$.

e) 1.

f) $\cos(1)-\cos(2)$.

g) $\cos(1)-\dfrac{(1+\cos(2))}{2}$

h) $\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

i) $\dfrac{(e-1)^2}{2}$.

j) $dfrac12$.

l) $\dfrac{3}{\pi}$.

m) $3\arctan(3)-4\arctan(2)-\ln(2)+\dfrac{\ln(5)}{2}+\dfrac{\pi}{4}$.

14. **a)** $\dfrac{21}{2}$.

b) $9\ln(2)$.

c) $\dfrac{\pi}{12}$.

d) $\dfrac{(e^2-3)}{2}$.

15. Note que

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x)g(y)\,dx\right]\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]g(y)\,dy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\int_c^d g(y)\,dy.$$

16. **a)** $\dfrac{19}{2}$.

b) $\dfrac{1}{2}$.

c) $2(2\ln(2)-1)$.

d) 0.

e) $\dfrac{\pi^2}{32}$.

f) $\dfrac{\ln(5)}{8}$.

17. **a)** $\dfrac{3}{2}$.

b) $\dfrac{8\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)}{9}$.

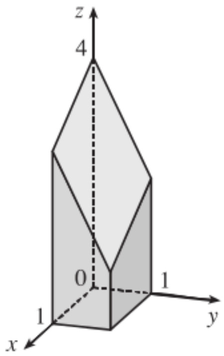
c) $\dfrac{(e-1)(1-e^{-1})}{4}$.

d) $\dfrac{4}{3}$.

e) 2.

f) e^2-2e.

18. .



19. $\dfrac{95}{2}$.

20. $\dfrac{166}{27}$.

21. $\dfrac{640}{3}$.

22. $\dfrac{(4+e)^{5/2}-e^{5/2}-5^{5/2}+1}{15}$.

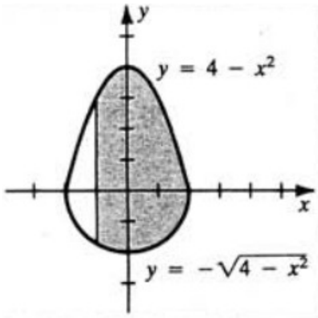
23. **a)** $\dfrac{9}{20}$.

b) $\dfrac{3}{10}$.

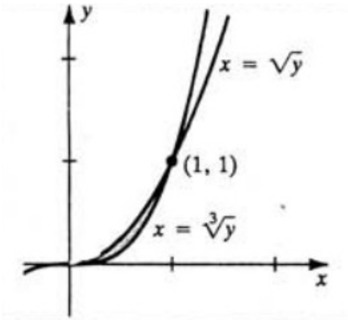
c) $e-1$.

d) $\dfrac{1}{3}$.

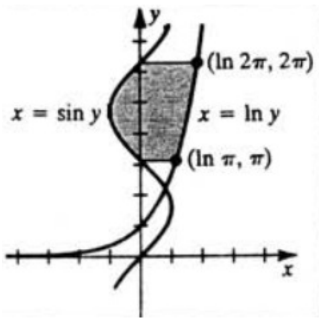
24. **a)** .



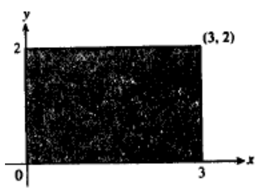
b) .



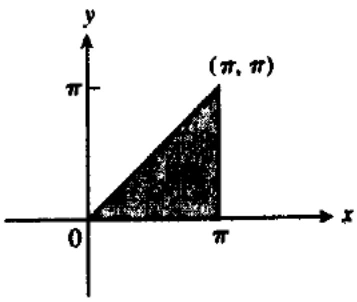
c) .



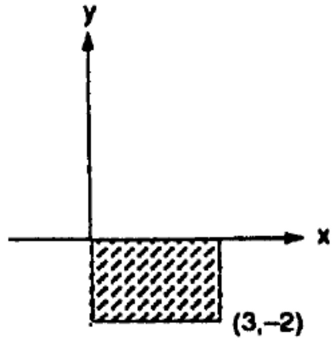
25. **a)** 16.



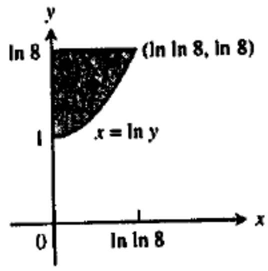
b) $\dfrac{\pi^2}{2} + 2$.



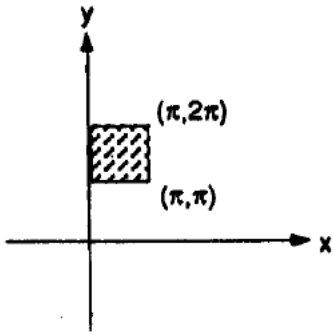
c) 0.



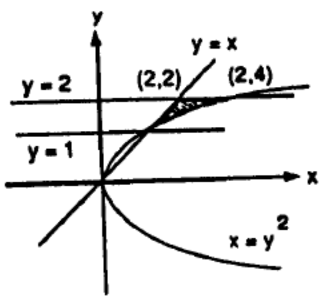
d) $8\ln(8) - 16 + e$.



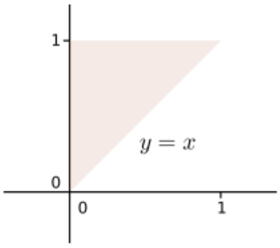
e) 2π.



f) $\frac{5}{6}$.



26. $1 - \cos(1)$.



27. **a)** $\displaystyle\int_{-1}^{4}\int_{-1}^{2}(y+2x)\,dx;dy = \frac{75}{2}.$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{1}^{2x+5} x - y\,dy;dx = -48.$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-2y}^{3y} xy^2\,dx;dy = \frac{1}{2}.$

d) $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{-y}^{y/2} e^{x/y}\,dx;dy = 8(e^{1/2} - e^{-1}).$

28. **a)** $\dfrac{256}{21}.$

b) $\pi.$

c) $\dfrac{3e^4+1}{16}.$

d) $\dfrac{e^{16}-17}{2}.$

e) $\dfrac{147}{20}.$

f) $0.$

g) $\dfrac{3\ln(2)}{2}.$

h) $(\ln(2))^2.$

i) $-\dfrac{1}{10}.$

29. $\dfrac{4}{3}.$

30. **a)** $\dfrac{6}{35}.$

b) $\dfrac{144}{35}.$

c) $\dfrac{31}{8}.$

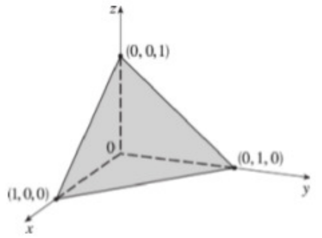
e) $\dfrac{16}{3}.$

f) $\dfrac{1}{3}$.

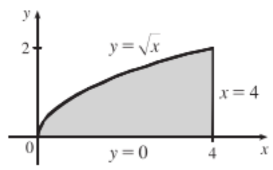
g) $\dfrac{625}{12}$.

h) $\dfrac{9\pi - 8}{3}$.

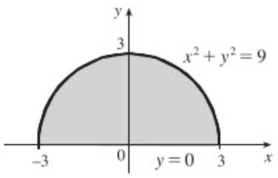
31. .



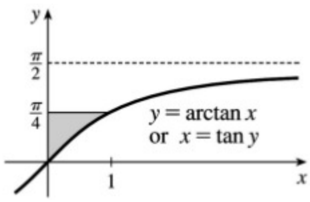
32. **a)** .



b) .



d) .



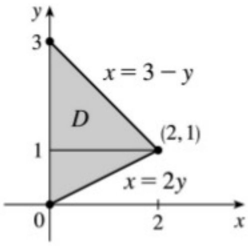
33. **b)** $e - 2$.

34. **a)** $\dfrac{\ln(9)}{3}$.

c) 2.

d) $4 - \operatorname{sen}(4)$.

35. $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y)\, dx dy.$

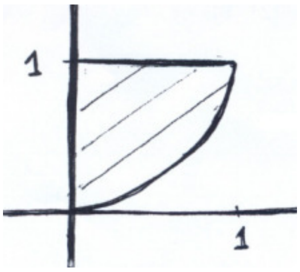


36. **b)** $\dfrac{2(e-1)}{3}$.

37. **b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2-x} x^2 + y^2 \; dy \; dx$

 c) $\dfrac{4}{3}$.

38. **a)** .



 b) $\dfrac{1-\cos(1)}{12}$.

39. **b)** $\dfrac{e^9-1}{6}$.

40. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{x} x\cos(y) \; dy \; dx = \int_0^{\pi/4} \int_y^{\pi/4} x\cos(y) \; dx \; dy = -\frac{\pi-4}{4\sqrt{2}}$.

41. **a)** $\dfrac{2(2\sqrt{2}-1)}{9}$.

 b) $\dfrac{2}{3}\sin^2\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

42. 100.

43. **a)** $\dfrac{1}{6}$.

 b) $\dfrac{13}{3}$.

 c) 0.

 d) $\dfrac{1}{6}$.

 e) 2.

f) $\frac{1}{2}$.

g) $\frac{16}{3}$.

h) $-\frac{16}{231}$.

44. **a)** -1.

b) $-\frac{1}{4}$.

c) 1.

d) $\frac{2(2\sqrt{2}-1)}{15}$.

e) 4.

f) $\ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))$.

g) $\frac{\text{sen}(1) - \cos(1)}{2}$.

h) $\frac{8}{3} - \sqrt{3}$.

i) $\frac{1+e^2}{4}$.

j) $\frac{e^4 - e - 3}{2}$.

l) 0.

m) $\frac{63}{20}$.

n) $\left(\frac{5}{72} - \frac{\sqrt{3}}{18}\right)\pi^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1\right)\pi$.

o) $2 - \frac{\pi}{2}$.

p) $\frac{2(2\sqrt{2}-1)}{9}$.

q) $\frac{13}{6}$.

r) $\frac{3\ln(2)}{2}$.

45. **a)** $\int_0^1 \left[\int_y^1 f(x,y)\,dx\right]dy$

b) $\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right]dy$

c) $\int_{-1}^1 \left[\int_{x^2}^1 f(x,y)\,dy\right]dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_1^{e^y} f(x,y)\,dx\right] dy. + \int_1^e \left[\int_y^1 f(x,y)\,dx\right] dy.$

e) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^x f(x,y)\,dy\right] dx + \int_1^3 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right] dx + \int_3^4 \left[\int_{x-3}^1 f(x,y)\,dy\right] dx$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\right] dy$

g) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right] dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left[\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\right] dy$

h) $\displaystyle\int_{-1}^0 \left[\int_0^{x+1} f(x,y)\,dy\right] dx + \int_0^2 \left[\int_0^{\frac{2-x}{2}} f(x,y)\,dy\right] dx$

i) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right] dy$

j) $\displaystyle\int_{e^{-1}}^1 \left[\int_0^{1+\ln(x)} f(x,y)\ ,dy\right] dx + \int_1^e \left[\int_{\ln(x)}^1 f(x,y)\,dy\right] dx$

l) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{y/2} f(x,y)\,dx\right] dy + \int_1^2 \left[\int_{y-1}^{y/2} f(x,y)\,dx\right] dy$

m) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{\mathrm{arctg}(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$

n) .

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x,y)\,dx\right] dy \quad + \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{1} f(x,y)\,dx\right] dy$$
$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \left[\int_{\frac{y^2}{2}}^{1} f(x,y)\,dx\right] dy$$

o) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}a} \left[\int_{2a+\sqrt{4a^2-y^2}}^{\sqrt{3}y} f(x,y)\,dx\right] dy.$

p) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{\mathrm{arcsen}(y)}^{\pi-\mathrm{arcsen}(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$

q) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\int_0^{\mathrm{arcsen}\, y} f(x,y)\,dx\right] dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left[\int_0^{\arccos y} f(x,y)\,dx\right] dy$

r) $\displaystyle\int_2^3 \left[\int_{3x-7}^{\sqrt{\frac{3x^2-7}{5}}} f(x,y)\,dy\right] dx$

s) $\displaystyle\int_{-1}^0 \left[\int_{1-\sqrt{1+y}}^{1+\sqrt{1+y}} f(x,y)\,dx\right] dy + \int_0^3 \left[\int_{\frac{y^2}{3}}^{1+\sqrt{1+y}} f(x,y)\,dx\right] dy$

46. **a)** 2π.

b) $\frac{1}{6}$.

c) $\frac{16}{15}$.

d) $\frac{\pi}{2}$.

e) 2π.

f) $\frac{e-1}{2}$.

g) $\frac{16a^3}{3}$.

h) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

i) $\frac{1}{6}$.

j) $\frac{\pi(1-\sqrt{2})}{8} + \frac{1}{3}$.

l) $\frac{\pi}{2}$.

m) $\frac{8}{15}$.

n) $\frac{1}{6}$.

o) $\frac{2}{3}$.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 3, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.

[4] C. H. Edwards Jr; D. E. Penney. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 2 e 3, Prentice Hall do Brasil, 1997.

[5] E. W. Swokowski. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2^a Edição, Markron Books, 1995.