1.ª Questão. Determine quais das seguintes transformações são lineares:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, y)$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 1, y)$.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x^2 + xy, x)$.

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x + y, x + 2y, x + 2y + z)$.

e) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z, w) = (2x + y - z + w, x + y - 3z)$.

2.ª Questão. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x + y, x + 2y)$. Calcule a representação matricial de T na base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, quando:

a) $\vec{v}_1 = (1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1)$.

b) $\vec{v}_1 = (0, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, 0)$.

c) $\vec{v}_1 = (1, 1)$ e $\vec{v}_2 = (1, 2)$.

3.ª Questão. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x+y, z+3y)$. Calcule a representação matricial de T na base $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ e $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, quando:

a) $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{u}_1 = (0, 0, 1)$, $\vec{v}_1 = (1, 0)$ e $\vec{v}_1 = (0, 1)$.

b) $\vec{u}_1 = (0, 2, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 0, 2)$, $\vec{u}_1 = (2, 0, 0)$, $\vec{v}_1 = (1, 0)$ e $\vec{v}_1 = (0, 1)$.

c) $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_1 = (1, 1)$ e $\vec{v}_1 = (1, 2)$.

4.ª Questão. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que na base canônica de $\mathbb{R}^2$ é representada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule mediante uma matriz de mudança de base apropriada:

a) A representação matricial de T na base $\vec{v}_1 = (0, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 0)$;

b) A representação matricial de T na base $\vec{v}_1 = (1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2)$.

5.ª Questão. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que na base canônica de $\mathbb{R}^2$ é representada por

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $T(x,y)$.

6.^{a} Questão. Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que na base $B=\{(1,1),(1,2)\}$ é representada por

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $T(x,y)$.

7.^{a} Questão. Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que na base $B=\{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\}$ é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule bases para o espaço nulo e para a imagem de T.

8.^{a} Questão. Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(x+y,x+y-z)$.

a) Calcule a matriz que representa T na base canónica.

b) Calcule uma base para o núcleo de T. A transformação T é injectiva?

c) Calcule uma base para a imagem de T. T é sobrejectiva?

d) Resolva a equação $T(x,y,z)=(1,1)$.

e) Existe algum vector $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ para o qual a equação $T(x,y,z)=(a,b)$ é impossível?

f) Existe algum vector $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ para o qual a equação $T(x,y,z)=(a,b)$ é possível e determinada?

9.^{a} Questão. Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a transformação linear que na base $B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ é representada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule uma base para o núcleo de T. T é injectiva?

b) Calcule uma base para a imagem de T. T é sobrejectiva?

c) Mostre que equação $T(x,y,z)=(2,4,0)$ não tem soluções.

d) Resolva a equação $T(x,y,z)=(1,1)$.

e) Existe algum vector $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ para o qual a equação $T(x,y,z)=(a,b)$ é impossível?

f) Existe algum vector $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ para o qual a equação $T(x,y,z)=(a,b)$ é possível e determinada?