Tópicos: Transformações lineares; Núcleo e Imagem; Isomorfismos e automorfismos; Matriz de uma transformação linear

1.ª Questão (Callioli). Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador assim definido na base canônica: $F(1,0,0) = (2,3,1)$, $F(0,1,0) = (5,2,7)$ e $F(0,0,1) = (-2,0,7)$. Determinar $F(x,y,z)$, onde (x,y,z) é um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$. Mostrar que F é um operador linear.

2.ª Questão (Callioli). Verifique se são operadores lineares no espaço $P_n(\mathbb{R})$:

a) $F : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = tf'(t)$, $\forall f(t) \in P_n(\mathbb{R})$;

b) $F : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = f'(t) + t^2 f''(t)$, $\forall f(t) \in P_n(\mathbb{R})$.

3.ª Questão (Callioli). Para cada uma das transformações abaixo determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = x + y - z$;

b) $F : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $F(f(t)) = t^2 f''(t)$.

4.ª Questão (Callioli). Determinar um operador linear do $\mathbb{R}^3$ cuja imagem é gerada por $(2,1,1)$ e $(1,-1,2)$.

5.ª Questão (Callioli). Considere o operador linear F do $\mathbb{R}^3$ definido por $F(1,0,0) = (1,1,1)$, $F(0,1,0) = (1,0,1)$ e $F(0,1,2) = (0,0,4)$. F é inversível? Se for, determine o isomorfismo inverso.

6.ª Questão (Callioli). Sejam $F, G \in L(\mathbb{R}^3)$ assim definidos:
$F(x,y,z) = (x+y, z+y, z)$ e $G(x,y,z) = (x+2y, y-z, x+2z)$
Determinar:

a) $F \circ G$;

b) $\mathrm{Ker}(F \circ G)$ e $\mathrm{Im}(G \circ F)$;

b) uma base e a dimensão de $\mathrm{Ker}(F^2 \circ G)$.

7.ª Questão (Callioli). Seja $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $F(x,y,z) = (x+z, y-2z)$. Determinar $(F)_{B,C}$ sendo $B = \{(1,2,1), (0,1,1), (0,3,-1)\}$ e $C = \{(1,5), (2,-1)\}$.

8.ª Questão (Callioli). Seja $F \in L(P_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definida por $F(p(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)dt$. Determinar a matriz de F em relação às bases $B = \{1, t, t^2\}$, e $C = \{1\}$.

9.ª Questão (Callioli). Determinar o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1,2), (0,5)\}$ é

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.ª Questão (Callioli). Seja F o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1,0),(1,4)\}$ é

$$[F]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Determinar a matriz de F em relação à base canônica.

2.ª Questão (Callioli). Seja T um operado de um espaço vetorial V de dimensão 2. Se a matriz de T em relação a uma certa base B de V é

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{2}$$

mostrar que $T^2 - (a+d)T + (ab-bc)I = 0$ (operador nulo).