Primeira lista de exercícios de MA211 – Cálculo II

Exercício 1. Encontre o domínio e a imagem da função $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nos casos abaixo. Represente geometricamente o domínio.

a) $f(x,y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$ b) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ e) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ f) $f(x,y) = \dfrac{2}{4x^2+9y^2}$

Exercício 2. Esboce as curvas de nível de $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nos casos abaixo.

a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ b) $f(x,y) = y - x^2$ c) $f(x,y) = y - 3x^2$

d) $f(x,y) = x - y^2$ e) $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2$ f) $f(x,y) = xy$

g) $f(x,y) = (x-1)(y-2)$ h) $f(x,y) = (x+1)(y+3)$ i) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16}$

j) $f(x,y) = 2x - 3y$ k) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ l) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

m) $f(x,y) = \dfrac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ n) $f(x,y) = (x-y)^2, x \geq 0, y \geq 0$ o) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

p) $f(x,y) = x^2 - y^2$ q) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y+3)^2$ r) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

Exercício 3. Esboce as curvas de nível de $f\colon A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nos casos abaixo.

a) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

b) $f(x,y,z) = y + z$

c) $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$

Exercício 4. Dada $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P = (x_0, y_0)$, encontre a equação da superfície de nível de f que passa por P.

a) $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$, $P = (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2-1}$, $P = (1,0)$

a) $f(x,y) = y\cos x$, $P = (0,1)$

Exercício 4. Dada $f\colon A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $P = (x_0, y_0, z_0)$, encontre a equação da superfície de nível de f que passa por P.

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x-y} + \ln z$, $P = (3,-1,1)$

b) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y+z^2)$, $P = (-1,2,1)$

Exercício 5. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy$. Verifique se f atinge um valor máximo na reta $x = 20 - t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$. (Note que a restrição de f à reta é um a função diferenciável de uma variável).

Exercício 6. Em cada um dos casos abaixo, seja S o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ satisfazendo a desigualdade dada. Faça um esboço de S e dê argumentos que expliquem se S é aberto, fechado, aberto e fechado ou nem aberto nem fechado. Indique em seu esboço a fronteira de S.

a) $1 \leq x \leq 2$ e $3 < y < 4$ b) $|x| < 1$ e $|y| < 3$

c) $xy > 1$ d)$y = x^2$

e) $1 < x^2 + y^2 \leq 3$ f) $1 \leq x \leq 2$ e $3 \leq y \leq 4$

Exercício 7. Nas figuras abaixo, associe cada conjunto de curvas de níveis ao gráfico da função correspondente.