Prova 2 – MA-327 - Álgebra Linear – 26/11/2020

Nome:____ **RA:**__________________

Atenção: Todas as respostas devem ser acompanhadas de justificativas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

1. (2pt) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Utilize o processo de Gram-Schmidt para obter uma base **ortogonal** de $\mathbb{R}^3$ a partir da base

$$\{(0,0,1),(1,2,1),(1,-3,0)\}.$$

RESPOSTA: Por Gram-Schmidt, temos que a base ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$ é dada por:

$$w_1 = (0,0,1),$$

$$w_2 = (1,2,1) - \frac{\langle (1,2,1),(0,0,1)\rangle}{\langle (0,0,1),(0,0,1)\rangle}(0,0,1) = (1,2,1) - \frac{1}{1}(0,0,1) = (1,2,0),$$

$$w_3 = (1,-3,0) - \frac{\langle (1,-3,0),(0,0,1)\rangle}{\langle (0,0,1),(0,0,1)\rangle}(0,0,1) - \frac{\langle (1,-3,0),(1,2,0)\rangle}{\langle (1,2,0),(1,2,0)\rangle}(1,2,0)$$

$$= (1,-3,0) - \frac{0}{1}(0,0,1) - \frac{-5}{5}(1,2,0) = (2,-1,0).$$

2. (2pt) Seja V um espaço vetorial com $\dim V = 200$. As seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique.

(a) (1pt) Existe uma transformação linear $T : V \to V$ tal que

$$20\dim(\mathrm{Ker}(T)) + 30\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3500.$$

RESPOSTA: A afirmação é FALSA. De fato, se $T : V \to V$ é linear, temos pelo Teorema do Núcleo e da Imagem que

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim V = 200.$$

Assim, se uma transformação linear satisfaz a equação do item (a), temos o sistema

$$\begin{cases} 20\dim(\mathrm{Ker}(T)) + 30\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3500 \\ \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 200 \end{cases},$$

que possui solução

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 250 \quad \text{e} \quad \dim(\mathrm{Im}(T)) = -50.$$

Como $\dim(\mathrm{Im}(T)) \geq 0$, uma tal transformação não existe.

(b) (0.5pt) Se $T : V \to V$ é uma transformação linear tal que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 150$, então a imagem de T não está contida em $\ker(T)$.

RESPOSTA: A afirmação é VERDADEIRA. Novamente pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos que

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 200,$$

e se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 150$, devemos ter que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 50$. Assim, todo subespaço de $\mathrm{Ker}(T)$ deve ter dimensão menor ou igual a 50 e portanto se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 150$ temos que $\mathrm{Im}(T)$ não pode estar contido em $\mathrm{Ker}(T)$.

(c) (0.5pt) Se $T : V \to V$ é uma transformação linear tal que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 185$, então a imagem de T está contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

RESPOSTA: A afirmação é FALSA, pois o espaço vetorial $\mathbb{R}^{200}$ tem dimensão 200 e se $\{e_1, e_2, \ldots, e_{200}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{200}$ e definirmos $T : \mathbb{R}^{200} \to \mathbb{R}^{200}$ como a única transformação linear tal que

$$T(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq i \leq 185 \\ e_i & \text{se } 185 < i \leq 200 \end{cases},$$

temos que

$$\mathrm{Ker}(T) = [\{e_1, e_2, \ldots, e_{185}\}]$$

e

$$\mathrm{Im}(T) = [\{e_{186}, e_{187}, \ldots, e_{200}\}],$$

e certamente $\mathrm{Im}(T)$ não está contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

3. (2pt) Seja $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 + z_1z_2.$$

(a) (1pt) Encontre uma base ortogonal, com relação ao produto interno acima, para o subespaço $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$;

RESPOSTA: Note que $S \neq \mathbb{R}^3$ e também que o conjunto L.I. $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ está contido em S. Assim, $S = [\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}]$ e $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ é uma base para S. Por Gram-Schmidt, uma base ortogonal para S é $\{w_1, w_2\}$ onde

$$w_1 = (1, 1, 0)$$

$$w_2 = (0, 1, 1) - \frac{\langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle}{\langle (1, 1, 0), (1, 1, 0) \rangle}(1, 1, 0) = (0, 1, 1) - \frac{2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0}(1, 1, 0)$$

$$= (0, 1, 1) - \frac{3}{5}(1, 1, 0) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$$

(b) (1pt) Encontre a projeção ortogonal de $v = (1, 2, 3)$ em S.

RESPOSTA: Sendo $\{w_1, w_2\}$ uma base ortogonal para S, temos que a projeção em questão é dada por

$$P_S(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2.$$

Mas,

$$\langle v, w_1 \rangle = \langle (1, 2, 3), (1, 1, 0) \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 8,$$

$$\langle v, w_2 \rangle = \left\langle (1, 2, 3), \left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) \right\rangle = 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot 1 = \frac{21}{5},$$

$$\langle w_1, w_1 \rangle = \langle (1, 1, 0), (1, 1, 0) \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 5,$$

$$\langle w_2, w_2 \rangle = \left\langle \left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 1\right), \left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) \right\rangle = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2 = \frac{11}{5},$$

e portanto

$$P_S(1, 2, 3) = \frac{8}{5}(1, 1, 0) + \frac{\frac{21}{5}}{\frac{11}{5}} \left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}, 0\right) + \left(-\frac{63}{55}, \frac{42}{55}, \frac{21}{11}\right) = \left(\frac{5}{11}, \frac{26}{11}, \frac{21}{11}\right)$$

4. (2pt) Determine $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ linear e não nula, de modo que $\mathrm{Ker}(T)$ seja gerado pelos polinômios $1 + x^3$ e $1 - x^2$ e tal que $1 \notin \mathrm{Im}(T)$.

RESPOSTA: Considere o conjunto $\{1, x, 1 - x^2, 1 + x^3\}$. Note que, se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são tais que

$$a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot (1 - x^2) + d \cdot (1 + x^3) = 0,$$

então

$$cx^3 - dx^2 + bx + (a + c + d) = 0 \implies c = d = b = 0 \implies a = 0,$$

e portanto $\{1, x, 1 - x^2, 1 + x^3\}$ é um conjunto L. I.. Como $\dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})) = 4$, tal conjunto é de fato uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Um cálculo simples mostra que

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = (a + c - d) + bx - c(1 - x^2) + d(1 + x^3),$$

e portanto, uma transformação linear $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ satisfaz

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a - b - d)T(1) + bT(x) - cT(1 - x^2) + dT(1 + x^3).$$

Como $\{1 - x^2, 1 + x^3\}$ deve gerar $\mathrm{Ker}(T)$, obtemos que

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a - b - d)T(1) + bT(x).$$

Por outro lado, a condição de que $1 \notin \mathrm{Im}(T)$ implica que se escrevermos

$$T(1) = \alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 \quad \text{e} \quad T(x) = \alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2,$$

então $\beta_1 = \gamma_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ e $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$ não pode ocorrer. Como, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$, obtemos que $\{T(1), T(x)\}$ deve ser L.I. Desta maneira, tomando por exemplo $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \beta_2 = 0$ e $\beta_1 = \gamma_2 = 1$, obtemos

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + c - d)x + bx^2,$$

que por construção satisfaz as hipóteses pedidas.

5. (2pt) Seja $T = T_2 \circ T_1$, onde

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \;\; T_1(a, b) = (a - 2b, 2a + 3b)$$
$$T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \;\; T_2(a, b) = (a - b) + bx + (a + b)x^2.$$

Encontre $[T]^{\beta}_{\gamma}$, onde $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\gamma = \{1, x, x^2\}$ são as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respectivamente.

RESPOSTA (MÉTODO 1): Temos que

$$T(a, b) = T_2 \circ T_1(a, b) = T_2(a-2b, 2a+3b) = \Big((a-2b)-(2a+3b)\Big)+(2a+3b)x+\Big((a-2b)+(2a+3b)\Big)x^2$$
$$= (-a - 5b) + (2a + 3b)x + (3a + b)x^2.$$

Assim,

$$T(1, 0) = -1 + 2x + 3x^2 \quad \text{e} \quad T(0, 1) = -5 + 3x + x^2,$$

donde

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

RESPOSTA (MÉTODO 2): Temos que

$$T_1(1, 0) = (1, 2) = 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1) \quad \text{e} \quad T_1(0, 1) = (-2, 3) = -2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1),$$

donde

$$[T_1]^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$T_2(1, 0) = 1 + x^2 \quad \text{e} \quad T_1(0, 1) = -1 + x + x^2,$$

donde

$$[T_2]^{\beta}_{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$[T]_\gamma^\beta = [T]_\gamma^\beta = [T_2]_\gamma^\beta [T_1]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Boa Prova!