Prova 1 – MA-327 - Álgebra Linear – 22/10/2020

Nome:____ **RA:**__________________

Atenção: Todas as respostas devem ser acompanhadas de justificativas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

1. (2pt) As seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique.

(a) (0.5pt) O subconjunto $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A^2 = A\}$ é um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$.

RESPOSTA: A afirmação é FALSA, pois para a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ certamente temos satisfeito $A^2 = A$. No entanto,

$$(-A)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \neq -A,$$

mostrando que $-A \notin S$ e portanto S não é subespaço.

(b) (0.5pt) Se U e W são subespaços vetoriais de V, então $\{u + w, u \in U, w \in W\}$ é um subespaço vetorial de V;

RESPOSTA: A afirmação é VERDADEIRA, pois como $0 \in U$ e $0 \in W$ temos que

$$0 = 0 + 0 \in U + W$$

mostrando que $U + W$ é não vazio. Por outro lado, dados a, b escalares, $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$ temos que

$$a(u_1 + w_1) + b(u_2 + w_2) = \underbrace{au_1 + bu_2}_{\in U} + \underbrace{aw_1 + bw_2}_{\in W} \in U + W,$$

mostrando que $U + W$ é subespaço vetorial.

(c) (0.5pt) O polinômio $p(t) = t^2 + 4t - 3$ é combinação linear de $p_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $p_2(t) = 2t^2 - 3t$ e $p_3(t) = t + 3$;

RESPOSTA: A afirmação é VERDADEIRA. Escrevendo

$$p(t) = ap_1(t) + bp_2(t) + 3p_3(t),$$

obtemos,

$$t^2 + 4t - 3 = a(t^2 - 2t + 5) + b(2t^2 - 3t) + c(t + 3) = (a + 2b)t^2 + (-2a - 3b + c)t + (5a + 3c).$$

Igualando os coeficientes dos polinômios da igualdade acima, temos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2b & & & = & 1 \\ -2a & - & 3b & + & c & = & 4 \\ 5a & & & + & 3c & = & -3 \end{array}\right.$$

Sob operações elementares, tal sistema é equivalente ao sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2b & & & = & 1 \\ & & b & + & c & = & 6 \\ & & & & 13c & = & 52 \end{array}\right. ,$$

e portanto $a = -3$, $b = 2$ e $c = 4$ é solução do sistema acima. Disso,

$$p(t) = -3p_1(t) + 2p_2(t) + 4p_3(t),$$

mostrando a veracidade da afirmação.

(d) (0.5pt) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 = 1\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

RESPOSTA: A afirmação é FALSA, pois o elemento neutro $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ não pertence a tal conjunto, uma vez que

$$0^2 + 0^2 = 0 \neq 1.$$

2. (2.5 pt) Seja

$$T_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ;\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

o espaço vetorial das matrizes reais 2×2 triangulares superiores.

(a) (0.8pt) Mostre que

$$\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

é uma base de $T_2(\mathbb{R})$

RESPOSTA: Dada uma matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ escreva

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ 0 & x+y+z \end{pmatrix}.$$

Obtemos então o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & a \\ x & - & y & & & = & b \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right. ,$$

que possui solução única dada por

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{a-b}{2} \quad \text{e} \quad z = c - a,$$

donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \frac{a+b}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (c-a)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

mostrando que γ gera $T_2(\mathbb{R})$. Note ainda que a equação (1) nos diz que a única combinação linear dos elementos de γ dando a matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a trivial, ou seja, γ é L.I. e portanto uma base de $T_2(\mathbb{R})$.

(b) (0.7pt) Determine a matriz de mudança de bases I_γ^β, da base canônica β para a base γ, onde

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

RESPOSTA: Para se obter a matriz I_γ^β, devemos escrever os elementos da base β como combinação linear dos elementos da base γ. Novamente pela equação (1) temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$I_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) (1pt) Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ encontre $[A]_\beta$ e $[A]_\gamma$.

RESPOSTA: Pela equação (1) temos que

$$[A]_\gamma = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \\ c-a \end{bmatrix}.$$

Além disso, o fato de que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

nos dá que

$$[A]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

3. (2pt) Considere os subconjuntos não vazios de $M_n(\mathbb{R})$

$$W_1 = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ \ A^T = -A\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ \ A^T = A\}.$$

(a) (1pt) Mostre que W_1 é subespaço de $M_n(\mathbb{R})$;

RESPOSTA: Note que W_1 é não vazio, uma vez que a matriz nula é sempre igual a menos sua transposta. Além disso, dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $A, B \in W_1$, temos que

$$(aA + bB)^T = (aA)^T + (bB)^T = aA^T + bB^T = -(aA + bB),$$

onde para a última igualdade utilizamos que $A^T = -A$ e $B^T = -B$, pois $A, B \in W_1$. Portanto, $aA + bB \in W_1$ e W_1 é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

(b) (1pt) Assumindo que W_2 é também subespaço de $M_n(\mathbb{R})$, prove que $M_n(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$;

RESPOSTA: Note que se $A \in W_1 \cap W_2$, então $A = A^T = -A$ e portanto $2A = 0$ ou seja, $A = 0$ e portanto $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Por outro lado, dado $A \in M_n(\mathbb{R})$, considere as matrizes

$$A_1 = \frac{1}{2}(A - A^T) \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1}{2}(A + A^T).$$

Então, $A = A_1 + A_2$ e também

$$A_1^T = \left(\frac{1}{2}(A - A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -A_1 \implies A_1 \in W_1$$

e analogamente,

$$A_2^T = \left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = A_2 \implies A_2 \in W_2,$$

mostrando que $M_n(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$ e portanto $M_n(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.

4. (2.5pt) Considere $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 3, 3)$, $v_3 = (0, 2, -1, 0)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 0)$ em $\mathbb{R}^4$. Seja $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

(a) (1pt) Encontre uma base para o subespaço gerado por S e calcule sua dimensão.

RESPOSTA: Como $V = [S]$ é gerado por S, podemos extrair uma base dentre os elementos de S. Agora, note que

$$a(1, 2, 0, 1) + b(1, 0, 3, 3) + c(0, 2, -1, 0) = (1, 0, 0, 0)$$

nos dá o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + 2c = 0 \\ 3b - c = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases},$$

que possui solução não trivial dada por $(a, b, c) = \frac{1}{2}(3, -1, -3)$ e portanto $V = [\{v_1, v_2, v_3\}]$. Por outro lado,

$$a(1, 2, 0, 1) + b(1, 0, 3, 3) + c(0, 2, -1, 0) = (0, 0, 0, 0),$$

nos fornece o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 2c = 0 \\ 3b - c = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases},$$

que só possui solução trivial $a = b = c = 0$. Portanto, $\{v_1, v_2, v_3\}$ gera V e é L.I. e é portanto uma base de V. Em particular, $\dim V = 3$.

(b) (0.5pt) Complete a base acima a uma base de $\mathbb{R}^4$

RESPOSTA: Tome $(0, 1, 0, 0)$ e como acima, considere $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$a(1, 2, 0, 1) + b(1, 0, 3, 3) + c(0, 2, -1, 0) = (0, 1, 0, 0). \quad (2)$$

Assim como acima, obtemos o sistema

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 2c = 1 \\ 3b - c = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases}.$$

Utilizando a primeira e a quarta equação, obtemos que $a = b = 0$ e portanto deveríamos ter (da segunda e terceira equações) que $2c = 1$ e $c = 0$ o que não pode ocorrer simultaneamente. Portanto, não existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfazendo a equação (2), ou seja, $(0, 1, 0, 0) \notin V$ e portanto $S \cup \{(0, 1, 0, 0)\}$ é L.I. Como $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ devemos necessariamente ter que

$$\{(1, 2, 0, 1), (1, 0, 3, 3), (0, 2, -1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$.

(c) (1pt) Seja $U = [\{v_1, v_2\}]$ e $W = [\{v_3, v_4\}]$. Verifique que $\dim(U) = \dim(W) = 2$. Calcule $\dim(U \cap W)$ sem encontrar $U \cap W$.

RESPOSTA: Como $U = [\{v_1, v_2\}]$ devemos mostrar que $\{v_1, v_2\}$ é L.I.. Se tal conjunto fosse L.D. existiria $a \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 = av_2$, ou seja,

$$(1, 2, 0, 1) = a(1, 0, 3, 3) \quad \text{e teríamos em particular } a = 0 \text{ e } a = 1.$$

Portanto, $\{v_1, v_2\}$ é L.I. e $\dim U = 2$. Analogamente, $\{v_3, v_4\}$ é L.I. e portanto $\dim W = 2$.

Por outro lado, $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é um conjunto gerador de $U + W$ e portanto $U + W = [S]$ e pelos itens anteriores, $\dim(U + W) = 3$. Como

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W),$$

obtemos que $\dim(U \cap W) = 1$.

5. (1pt) Seja $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ base de um espaço vetorial V de dimensão n. Considerando a transformação linear $T : V \to V$ definida por

$$T(u_1) = u_2, T(u_2) = u_3, \cdots, T(u_n) = u_1,$$

mostre que $T^n = I$, mas $T^{n-1} \neq I$, onde $I : V \to V$ é a transformação linear identidade definida por $I(v) = v$.

RESPOSTA: Sendo $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de V, dado $u \in V$ podemos escrever $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$. Por linearidade, temos que

$$T^n(u) = \alpha_1 T^n(u_1) + \alpha_2 T^n(u_2) + \cdots + \alpha_n T^n(u_n).$$

Dessa maneira, para mostrar que $T^n = I$ é suficiente mostrar que $T^n(u_j) = u_j$ para todo $j = 1, \dots, n$. Note no entanto que por hipótese, dado $j = 1, \dots, n$ temos que

$$\begin{array}{l} T(u_j) = u_{j+1} \\ T^2(u_j) = T(T(u_j)) = T(u_{j+1}) = u_{j+2} \\ T^3(u_j) = T(T^2(u_j)) = T(u_{j+2}) = u_{j+3} \\ T^4(u_j) = T(T^3(u_j)) = T(u_{j+1}) = u_{j+4} \end{array},$$

e em geral $T^k(u_j) = u_{j+k}$ se $j + k \leq n$. Assim, como $j + (n - j) = n$, temos que

$$T^n(u_j) = T^j(T^{n-j}(u_j)) = T^j(u_{j+(n-j)}) = T^j(u_n)$$

$$= T^{j-1}(T(u_n)) = T^{j-1}(u_1) = u_{1+(j-1)} = u_j,$$

e portanto, $T^n = I$.

Por outro lado, se $T^{n-1} = I$ teríamos em particular que $T^{n-1}(u_1) = u_1$. No entanto, pelas equações acima, $T^{n-1}(u_1) = u_n$ e teríamos $u_1 = u_n$ o que é absurdo uma vez que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V. Assim, $T^{n-1} \neq I$.

Boa Prova!