Exame de MT- 401/ MS - 991 – Análise Aplicada
$1.^o$ semestre de 2017 – 06/07/2017

Nome:____

RA:____

Questões	Valores	Notas
$1.^a$	2.0	
$2.^a$	2.0	
$3.^a$	2.0	
$4.^a$	2.0	
$5.^a$	2.0	
$6.^a$	2.0	
Total	10.0	

$1.^a$ **Questão.** Seja (λ_n) uma sequência de escalares não nulos e seja

$$\mathcal{D} = \left\{ x = (\xi_j) \in l^2 : \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2 |\xi_j|^2 < \infty \right\}$$

Mostre que $\mathcal{D}$ é um subespaço denso de l^2 (0.75 ponto). Mostre também que o operador $T : \mathcal{D} \longrightarrow l^2$ definido por $Tx = (\lambda_j \xi_j)$, $x = (\xi_j) \in \mathcal{D}$, é invertível (0.5 ponto), com imagem $\mathcal{R}(T)$ densa em l^2 (0.75 ponto).

2.^{a} Questão.

a) Considere a afirmação: Seja então $M \subset X$ e $(X, \|\|)$ espaço normado. M é limitado se, e somente se, existe $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c \; \forall \, x \in M$. Demonstre ou dê um contra exemplo para tal afirmação. (1.5 ponto)

b) O conjunto de todos os inteiros com a métrica $d(m, n) = |m - n|$, $m, n \in \mathbb{Z}$ é um espaço métrico completo? Se sim, prove, senão explique. (0.5 ponto)

3.^{a} **Questão.** Seja X espaço de Banach $T : X \longrightarrow X$ operador linear limitado tal que T^{-1} existe e é limitado. Mostre que se $\|T\| \leq 1$ e $\|T^{-1}\| \leq 1$, então

$$\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$$

e que $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. (2.0 pontos)

4.^{a} Questão. Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado em um espaço com produto interno X de corpo complexo $\mathbb{C}$.

a) Se $\langle Tx, x\rangle = 0 \; \forall\, x \in X$, então $T = 0$? (1.5 ponto)
b) O que dizer se o corpo for o real $\mathbb{R}$? (0.5 ponto)

5.^{a} Questão. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência ortonormal completa em um espaço de Hilbert H e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma outra sequência ortonormal tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1.$$

Mostre que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é também completa em H. (2.0 pontos)

6.^{a} Questão. Seja S o conjunto $\{f \in C[0,1] : \|f\| \leq 1\,(\text{norma do máximo}),\, f(0) = 0, f(1) = 1\}$ e o operador $T : S \longrightarrow S$ definido por $Tf(t) = f(t^2)$. Mostre que S é um subconjunto fechado e convexo (0.5 ponto) e que o operador T é um operador contínuo (0.5 ponto) que não possui ponto fixo (1 ponto).

Boa Prova!