Lista de Exercícios 1.1 - 26/08/2008

1. Suponha que um processo padrão de produção de lâmpadas as fabriquem com distribuição exponencial com vida média de 2000 horas. Um engenheiro deseja testar um novo processo no qual a vida da lâmpada será aumentada em pelo menos 10%. Suponha que o engenheiro colete uma amostra aleatória $T_1, \ldots, T_n$ de tempos de vida de lâmpadas fabricadas pelo novo processo.

   (a) Qual o estimador pelo método dos momentos para o tempo médio de vida das lâmpadas.

   (b) Descreva uma regra de decisão que você acha razoável para que o engenheiro decida que o processo novo é melhor que o antigo. Isto é coloque uma regra de decisão do tipo: "Decido que o processo novo é melhor que o antigo se ..."

   (c) Qual o tamanho da amostra a ser testada se ele deseja que com probabilidade aproximada de 0.01 ele descarte o novo processo quando na realidade este processo produz lâmpadas com tempo médio de vida de 2250 horas? (Use o Teorema Central do Limite)

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s iid Gama(α, β).

   Portanto, sua função de densidade é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

   (a) Mostre que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \mathbb{E}(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}.$$

(b) Portanto, o estimador de (α, β) pelo método dos momentos seria obtido resolvendo o sistema de equações :

$$\bar{X} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{\hat{\alpha}(\hat{\alpha}+1)}{\hat{\beta}^2}.$$

Obtendo,

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}}{M_2 - \bar{X}^2}, \qquad \hat{\beta} = \frac{\bar{X}^2}{M_2 - \bar{X}^2}.$$

(c) Ache a função de verossimilhança neste caso.

(d) Ache o sistema de equações que deve ser satisfeito pelos estimadores de máxima verossimilhança.

(e) Resolva este sistema se $n = 4$ e $x_1 = 2.6$, $x_2 = 3.9$, $x_3 = 8.4$ e $x_4 = 2.5$.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s iid beta(a, b).

Portanto, sua função de densidade é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\text{Beta}(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1.$$

(a) Mostre que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b} \qquad \mathbb{E}(X^2) = \frac{a(a+1)}{(a+b+1)(a+b)}.$$

(b) Ache o estimador de (a, b) pelo método dos momentos.

(c) Ache a função de verossimilhança neste caso.

(d) Ache o sistema de equações que deve ser satisfeito pelos estimadores de máxima verossimilhança.

(e) Resolva este sistema se $n = 5$ e $x_1 = 0.6$, $x_2 = 0.9$, $x_3 = 0.4$, $x_4 = 0.5$ e $x_5 = 0.7$.

4. Usando o fato que se $X_1, \ldots, X_n$ são iid $\exp(\theta)$ então $X_1 + \ldots + X_n \sim$ Gama(n, θ). Recalcule o tamanho de amostra necessário no último item do Exercício 1 se a probabilidade de erro aceitável for 0.1. Isto é, qual o tamanho da amostra a ser testada se ele deseja que com probabilidade aproximada de 0.1 ele descarte o novo processo quando na realidade este processo produz lâmpadas com tempo médio de vida de 2250 horas? Use o MINITAB para calcular as probabilidades usando diretamente a distribuição gamma.