DM–IMECC–UNICAMP – Cálculo III - MA311 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **3a. prova, 06/12/2010**

**Aluno:** ____________________________ RA: ____________

**Assinatura (idêntica à do RG):** ________________________________

Observações: ***Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligue o celular! Não destaque o grampo da prova.***

**ESCOLHA 4 (QUATRO) QUESTÕES.**
**Marque as questões escolhidas nos parêntesis (_).**
**Cada questão vale 2,5 pontos.**

## (_) Questão 1.

**a) (1,5 pontos)** Calcule a matriz fundamental $\Phi(t)$ do sistema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \csc t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi\,,$$

tal que $\Phi(0) = I$, i.e. $e^{tA}$.

**b) (1,0 ponto)** Calcule uma função (vetorial) $\mathbf{u}(t)$ tal que $e^{tA}\mathbf{u}$ seja uma solução particular do sistema (não-homogêneo).

*Dados*: $\csc t = 1/\mathrm{sen} t$, $\int \cot t\, dt = \ln|\mathrm{sen} t| + c$.

## (_) Questão 2.

**a) (0,6 pontos)** Calcule o limite da sequência $\{(1 - \frac{1}{n})^{2n}\}$, se ela for convergente.

**b) (0,6 pontos)** Mostre que a sequência $\{\frac{2^n}{n!}\}$ é monótona e limitada (determine se é não-crescente ou não-decrescente e dê uma cota inferior e uma cota superior). Ela é convergente ou divergente? (*Não se esqueça de justificar.*)

**c) (0,6 pontos)** A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente? Caso positivo, calcule a sua soma (o limite das somas parciais).

**d) (0,7 pontos)** Determine se a série $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ é convergente ou divergente explicitando o teste utilizado.

## (_) Questão 3.

Calcule a série de Maclaurin da função $f(x) = 1/(1 + 2x^3)$, ou seja, escreva $f(x)$ como uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e, **usando o Teste da Razão**, determine o raio de convergência desta série. Determine também o seu intervalo de convergência.

## (_) Questão 4.

**a) (0,5 pontos)** Justifique porque $x_0 = 0$ **não é** um ponto ordinário para a equação

$$x(x-1)y'' + 2xy' - \frac{1}{2}y = 0.$$

**b) (1,0 ponto)** Mesmo assim, **sem calcular** justifique por que ela possui uma solução em série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e estime o raio de convergência de uma série destas. Calcule uma solução destas, determinando os coeficientes $a_n$ pelo menos para $n \le 3$.

**c) (1,0 ponto)** Dê a forma de uma segunda solução linearmente independente da solução mencionada no item **a)**, num intervalo aberto contendo $x_0 = 0$. (Não precisa calcular esta segunda solução. Apenas dê a forma. Não se esqueça de justificar.)

**(__) Questão 5.**

**a) (0,5 pontos)** Mostre que uma função de variáveis separadas $u(x,t) = X(x)T(t)$ é uma solução da EDP

$$u_t = u_{xx} - 2u_x, \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

($L > 0$) se, e somente se, $X$ e $T$ são soluções das EDOs

$$X'' - 2X' = -\lambda X, \qquad T' = -\lambda T$$

para uma constante arbitrária $\lambda$.

**b) (1,2 pontos)** Supondo $\lambda > 1$,* obtenha a solução do PVIC

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

pelo método de separação de variáveis, ou seja, usando o resultado do item **a)**, determine funções $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ satisfazendo a EDP e a condição de contorno ($u(0,t) = u(L,t) = 0$) tal que $u(x,t) = \sum c_n u_n(x,t)$ seja solução, com os coeficientes $c_n$ dados em termos da função $f$.

**c) (0,8 pontos)** Calcule a série de Fourier em senos no intervalo $(0,\pi)$ da função $\mathrm{e}^{-x}$, ou seja, calcule $c_n$ tal que $\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx$ para $x \in (0,\pi)$. Justifique porque esta igualdade vale para todo $x \in (0,\pi)$.

<u>*Dado*</u>: $\int \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} ax\, dx = -(a^2+1)^{-1}\mathrm{e}^{-x}\left(\operatorname{sen} ax + a\cos ax\right) + c$.

**BOA PROVA!**

*Sem calcular explicitamente $X$, é possível mostrar que $\lambda - 1 = \int_0^L [(\mathrm{e}^{-x}X)']^2 dx / \int_0^L [\mathrm{e}^{-x}X]^2 dx$ (para $X \not\equiv 0$). Na verdade, a mudança $X = \mathrm{e}^{x}Y$ transforma a equação $X'' - 2X' = -\lambda X$ em $-Y'' = (\lambda - 1)Y$.

# Gabarito

**1. a) (1,5 pontos)** *Calcule a matriz fundamental* $\Phi(t)$ *do sistema*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \csc t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi\,,$$

*tal que* $\Phi(0) = I$, *i.e.* $e^{tA}$.

Autovalores:

$$\begin{vmatrix} 2-r & -5 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix} = 0$$
$$r^2 + 1 = 0, \quad r = \pm i\,.$$

Um autovetor associado a $r = i$:

$$\begin{bmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$
$$(2-i)c_1 - 5c_2 = 0, \quad V = (5, 2-i).$$

**0,2 pontos** até aqui.

Solução complexa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathrm{e}^{it}V = \mathrm{e}^{it}\begin{bmatrix} 5 \\ 2-i \end{bmatrix} \\
&= (\cos t + i\mathrm{sen}t)\begin{bmatrix} 5 \\ 2-i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5\cos t + i5\mathrm{sen}t \\ (2\cos t + \mathrm{sen}t) + i(2\mathrm{sen}t - \cos t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 5\mathrm{sen}t \\ 2\mathrm{sen}t - \cos t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

CFS:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}t \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 5\mathrm{sen}t \\ 2\mathrm{sen}t - \cos t \end{bmatrix}.$$

\+ **0,4**

Uma matriz fundamental:

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} 5\cos t & 5\mathrm{sen}t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}t & 2\mathrm{sen}t - \cos t \end{bmatrix}.$$

\+ **0,4**

$\mathrm{e}^{tA}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= \Psi(t)\Psi(0)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 5\cos t & 5\mathrm{sen}t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}t & 2\mathrm{sen}t - \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= -\tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 5\cos t & 5\mathrm{sen}t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}t & 2\mathrm{sen}t - \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \\
&= -\tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -5\cos t - 10\mathrm{sen}t & 25\mathrm{sen}t \\ -5\mathrm{sen}t & 10\mathrm{sen}t - 5\cos t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos t + 2\mathrm{sen}t & -5\mathrm{sen}t \\ \mathrm{sen}t & \cos t - 2\mathrm{sen}t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

\+ **0,5**

**b) (1,0 ponto)** *Calcule uma função (vetorial)* $\mathbf{u}(t)$ *tal que* $e^{tA}\mathbf{u}$ *seja uma solução particular do sistema (não-homogêneo).*

( Relembrando a fórmula para $u'$ (esta parte não será cobradada): substuindo $x = \Psi(t)u$ no sistema, obtemos

$$\begin{aligned} (\Psi u)' &= A(\Psi u) + g \\ A\Psi u + \Psi u' &= A\Psi u + g \\ \Psi u' &= g \ \therefore \ u' = (\Psi)^{-1} g \ ) \end{aligned}$$

$u' = (\Psi)^{-1}g$ **0,3 pontos**.

Tomando $\Psi = \mathrm{e}^{tA}$, temos:

$$\begin{aligned} u' &= (\mathrm{e}^{tA})^{-1}g = \mathrm{e}^{-tA}g \\ &= \begin{bmatrix} \cos(-t) + 2\mathrm{sen}(-t) & -5\mathrm{sen}(-t) \\ \mathrm{sen}(-t) & \cos(-t) - 2\mathrm{sen}(-t) \end{bmatrix} g \\ &= \begin{bmatrix} \cos t - 2\mathrm{sen}t & 5\mathrm{sen}t \\ -\mathrm{sen}t & \cos t + 2\mathrm{sen}t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \csc t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ \cot t + 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$+ \mathbf{0,5}$

Logo,

$$\begin{aligned} u &= \int \begin{bmatrix} 5 \\ \cot t + 2 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \int 5dt \\ \int (\cot t + 2)dt \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5t \\ \ln|\mathrm{sen}t| + 2t \end{bmatrix} \ (+\mathbf{c}) \,. \end{aligned}$$

$+ \mathbf{0,2}$

**2. a) (0,6 pontos)** *Calcule o limite da sequência* $\{(1 - \frac{1}{n})^{2n}\}$*, se ela for convergente.*

A sequência é restrição da função $f(x) = (1 - \frac{1}{x})^{2x}$, $x > 0$

**0,2 pontos**

e

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left((1 - \frac{1}{x})^{-x}\right)^{-2} = \left(\lim_{x\to\infty} (1 - \frac{1}{x})^{-x}\right)^{-2},$$

(pois a função $y \mapsto y^{-2}$ $(y \neq 0)$ é contínua)

$+ \mathbf{0,2}$

$$= \mathrm{e}^{-2},$$

pois $\lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{x})^{-x}$ $(= \lim_{x\to-\infty}(1 + \frac{1}{x})^{x}) = \mathrm{e}$ - fato conhecido de Cálculo I (ou e.g. aplicando o logaritmo e a Regra de L'Hopital: $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to-\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to-\infty}(\ln(1+\frac{1}{x}))/(1/x) = \lim_{x\to-\infty}(1/(1+\frac{1}{x}))(-1/x^2)/(-1/x^2) = 1$) logo, a sequência $\{(1 - \frac{1}{n})^{2n}\}$ é convergente e $\lim(1 - \frac{1}{n})^{2n} = \lim_{x\to\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-2}$.

**+ 0,2**

**2. b) (0,6 pontos)** *Mostre que a sequência $\{\frac{2^n}{n!}\}$ é monótona e limitada (determine se é não-crescente ou não-decrescente e dê uma cota inferior e uma cota superior). Ela é convergente ou divergente?*

Seja $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

$$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{2^n}{n!} \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq n+1.$$

Como a última desigualdade é claramente verdadeira, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, concluimos que a sequência é monótona não-crescente. **0,2**

Além disso, $a_n > 0$ e $a_n \leq a_1 = 2$, já que a sequência é não-crescente, para qualquer $n$. Então a sequência é limitada (0 é uma cota inferior e 2, superior). + **0,2**

Sendo monótona e limitada, a sequência é convergente (Teorema). + **0,2**

**2. c) (0,6 pontos)** *A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente? Caso positivo, calcule a sua soma.*

Série geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$, $|r| < 1$, logo convergente. **0,2**
$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$ + **0,2**
$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 - 1 - \frac{1}{2} = 1/2$ + **0,2**

**2. d) (0,7 pontos)** *Determine se a série $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ é convergente ou divergente explicitando o teste utilizado.*

Sejam $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ e $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} n^{3/2} = \lim \frac{n^2}{n^2+1} = 1$. Como a série $\sum b_n$ é convergente, pois é uma p-série com $p = 3/2 > 1$, **0,3**
concluimos que $\sum a_n$ também é convergente, pelo Teste da Comparação por Limite. + $\mathbf{0,3}$

**3.** *Calcule a série de Maclaurin da função $f(x) = 1/(1+2x^3)$ e* **<u>usando o Teste da Razão</u>**, *determine o raio de convergência desta série. Determine também o seu intervalo de convergência.*

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(|x| < 1)$ – série geométrica. **0,5**

$\dfrac{1}{1+2x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{3n}$ $(|2x^3| < 1)$ – série de Maclaurin. + **1,0**

Raio de convergência, usando o Teste da Razão:

Seja $a_n = (-2)^n x^{3n}$. $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \dfrac{2^{n+1}|x|^{3(n+1)}}{2^n |x|^{3n}} = 2|x|^3$. Logo, a série converge se, e somente se, $2|x|^3 < 1$, i.e. $|x| < 1/\sqrt[3]{2}$, ou seja, o raio de convergência é $1/\sqrt[3]{2}$. + **0,5**

Intervalo de convergência:

$x = -1/\sqrt[3]{2} \Rightarrow 2x^3 = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ - série divergente ($\lim 1 \neq 0$). Logo $x = -1/\sqrt[3]{2}$ não pertence ao intervalo de convergência. + $\mathbf{0,25}$

$x = 1/\sqrt[3]{2} \Rightarrow 2x^3 = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ - série divergente. Logo $x = 1/\sqrt[3]{2}$ não pertence ao intervalo de convergência.

Portanto o intervalo de convergência é o intervalo aberto $(-1/\sqrt[3]{2}, 1/\sqrt[3]{2})$. + $\mathbf{0,25}$

**4. a) (0,5 pontos)** *Justifique porque* $x_0 = 0$ **não é** *um ponto ordinário para a equação*

$$x(x-1)y'' + 2xy' - \frac{1}{2}y = 0.$$

$q(x) = \dfrac{-1/2}{x(x-1)}$ não é analítica em $x_0 = 0$, **0,2**

já que não existe o limite $\lim_{x\to 0} q(x)$. $+\ \mathbf{0,3}$

**4. b) (1,0 ponto)** *Mesmo assim,* **sem calcular** *justifique por que ela possui uma solução em série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e estime o raio de convergência de uma série destas. Calcule uma solução destas, determinando os coeficientes* $a_n$ *pelo menos para* $n \leq 3$.

$$xp(x) = x\frac{2x}{x(x-1)} = \frac{2x}{x-1} \quad \text{e} \quad x^2q(x) = x^2\frac{-1/2}{x(x-1)} = -\frac{x}{2(x-1)}$$

são analíticas em $x_0 = 0$, pois são funções racionais e $x_0 = 0$ não é uma raiz dos denominadores. $\mathbf{0,1}$

Logo $x_0 = 0$ é um ponto singular (não ordinário - item a)) regular. Então, pelo Teorema de Frobenius, a equação possui uma solução da forma $y_1 = |x|^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(x \approx 0, x \neq 0)$ onde $r_1$ é a maior raiz da equação indicial

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

$+\ \mathbf{0,1}$

$p_0 = \lim_{x\to 0} xq(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x-1} = 0$ e
$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2(x-1)} = 0$
$r(r-1) = 0$; raízes: $r_1 = 1,\ r_2 = 0$.

$+\ \mathbf{0,1}$

Logo, $y_1 = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ $(a_0 = 0)$ é uma série de potências, para $x > 0$ e $x$ próximo de zero (pelo menos). $+\ \mathbf{0,1}$

Os raios de convergências das séries de Taylor das funções $xp(x)$ e $x^2q(x)$ em torno de $x_0 = 0$ (séries de Maclaurin) é 1, pois estas funções são racionais e 1 é uma raiz dos seus denominadores (a única raiz) - v. Teorema. Logo, o raio de convergência de $y_1$ é no mínimo 1. $+\ \mathbf{0,1}$

Derivando e substituindo $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ na equação, temos:

$$(x^2 - x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$+\ \mathbf{0,2}$

$$-2a_2 + 2a_1 - \tfrac{1}{2}a_1 = 0 \ \therefore\ 2a_2 = \tfrac{3}{2}a_1, \quad \boxed{a_2 = \tfrac{3}{4}a_1}$$

$$-(n+1)na_{n+1} + [n(n-1) + 2n - \tfrac{1}{2}]a_n = 0 \ \therefore\ \boxed{a_{n+1} = \tfrac{(n+1)n}{n^2+n-\frac{1}{2}}a_n}, \quad n \geq 2$$

$$\boxed{a_3 = \tfrac{6}{9/2}a_2 = \tfrac{4}{3}\tfrac{3}{4}a_1 = a_1}$$

$+\ \mathbf{0,3}$

$(a_1 \neq 0$ é arbitrário, e.g. $a_1 = 1)$.

**4. c) (1,0 ponto)** *Dê a forma de uma segunda solução linearmente independente da solução mencionada no item* **a)**, *num intervalo aberto contendo $x_0 = 0$.*

Como $x_0 = 0$ é um ponto singular regular (item b)) e as raízes $r_1 = 1$, $r_2 = 0$ da equação indicial satisfazem $r_1 - r_2 = 1 \in \mathbb{N}$ (item b)), pelo Teorema de Frobenius, temos que uma segunda solução L.I. de $y_1$ é da forma

$$ay_1 \ln|x| + |x|^{r_2}[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n] = ay_1 \ln|x| + [1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n]$$

**0,8**

onde os coeficientes $a$ e $c_n$, $n \geq 1$, podem ser determinados por substituição na equação ou

$$a = \lim_{r\to 0}(r - r_2)a_1(r) = \lim_{r\to 0} ra_1(r), \quad c_n = \frac{d}{dr} ra_n(r)\Big|_{r=0}.$$

$+ \mathbf{0,2}$

**5. a) (0,5 pontos)** *Mostre que uma função de variáveis separadas $u(x,t) = X(x)T(t)$ é uma solução da EDP*

$$u_t = u_{xx} - 2u_x, \quad 0 < x < L, \ t > 0$$

*($L > 0$) se, e somente se, $X$ e $T$ são soluções das EDOs*

$$X'' - 2X' = -\lambda X, \quad T' = -\lambda T$$

*para uma constante arbitrária $\lambda$.*

Substituindo $u(x,t) = X(x)T(t)$ na equação (EDP), temos:

$$\begin{gathered} XT' = X''T - 2X'T \\ \tfrac{XT'}{XT} = \tfrac{X''T}{XT} - 2\tfrac{X'T}{XT} \\ \tfrac{T'}{T} = \tfrac{X''}{X} - 2\tfrac{X'}{X} \end{gathered}$$

**0,2**

Daí, como $x$ e $t$ são variáveis independentes, segue-se que

$$\frac{T'}{T} = -\lambda = \frac{X''}{X} - 2\frac{X'}{X}$$

para alguma constante $\lambda$. $+ \mathbf{0,1}$

Reciprocamente, dadas estas duas EDOs, temos

$$\begin{gathered} \tfrac{T'}{T} = \tfrac{X''}{X} - 2\tfrac{X'}{X} \\ XT\tfrac{T'}{T} = XT\tfrac{X''}{X} - XT2\tfrac{X'}{X} \\ XT' = X''T - 2X'T \end{gathered}$$

logo, $u(x,t) = X(x)T(t)$ satisfaz a EDP. $+ \mathbf{0,2}$

**5. b) (1,2 pontos)** *Supondo $\lambda > 1$, obtenha a solução do PVIC*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

*pelo método de separação de variáveis, ou seja, usando o resultado do item* **a)**, *determine funções $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ satisfazendo a EDP e a condição de contorno ($u(0,t) = u(L,t) = 0$) tal que $u(x,t) = \sum c_n u_n(x,t)$ seja solução, com os coeficientes $c_n$ dados em termos da função $f$.*

Resolvendo a EDO $X'' - 2X' = -\lambda X$, $\lambda > 1$ (EDO linear homogênea com coeficientes constantes):
Equação característica: $r^2 - 2r + \lambda = 0$; raízes: $r = (2 \pm \sqrt{4-4\lambda})/2 = 1 \pm i\sqrt{\lambda - 1}$.
Solução geral: $X = \mathrm{e}^x(c_1 \cos\sqrt{\lambda-1}x + c_2 \mathrm{sen}\sqrt{\lambda-1}x)$

**0,2**

C.C.:
$x = 0$: $c_1 = 0 \ \therefore X = c_2\mathrm{e}^x\mathrm{sen}\sqrt{\lambda-1}x$
$x = L$: $c_2\mathrm{e}^L\mathrm{sen}\sqrt{\lambda-1}L = 0$
$\mathrm{sen}\sqrt{\lambda-1}L = 0$
$\sqrt{\lambda-1}L = n\pi \quad \lambda \equiv \lambda_n = 1 + n^2\pi^2/L^2, \quad n = 1, 2, \cdots$

$+ \mathbf{0,2}$

$$X_n = \mathrm{e}^x\mathrm{sen}\sqrt{\lambda_n - 1}x = \mathrm{e}^x\mathrm{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

$$T_n = \mathrm{e}^{-\lambda_n t} = \mathrm{e}^{-(1+n^2\pi^2/L^2)t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x)T_n(t) = \mathrm{e}^x \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-(1+n^2\pi^2/L^2)t}\mathrm{sen}\frac{n\pi}{L}x\,.$$

$+ \mathbf{0,2}$

C.I.:

$$f(x) = u(x,0) = \mathrm{e}^x \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

$+ \mathbf{0,2}$

$$\mathrm{e}^{-x}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

$+ \mathbf{0,2}$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx\,.$$

$+ \mathbf{0,2}$

**5. c) (0,8 pontos)** *Calcule a série de Fourier em senos no intervalo* $(0, \pi)$ *da função* $e^{-x}$*, ou seja, calcule* $c_n$ *tal que* $e^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} nx$ *para* $x \in (0, \pi)$*. Justifique porque esta igualdade vale para todo* $x \in (0, \pi)$*.*
<u>Dado</u>: $\int e^{-x} \text{sen} ax \, dx = -(a^2+1)^{-1} e^{-x} (\text{sen} ax + a \cos ax) + c.$

Série de Fourier em senos no intervalo $(0, \pi)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} nx \ , \qquad c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen} nx \, dx \, .$$

**0, 2**

$$\begin{aligned} c_n &= \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \text{sen} nx \, dx \\ &= \tfrac{2}{\pi} \left[ -(n^2+1)^{-1} e^{-x} (\text{sen} nx + n \cos nx) \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= -\tfrac{2}{\pi(n^2+1)} \left[ e^{-\pi} n (-1)^n - n \right] \\ &= -\tfrac{2n}{\pi(n^2+1)} \left( (-1)^n e^{-\pi} - 1 \right) \, . \end{aligned}$$

**+ 0, 3**

A série converge e é igual a função $e^{-x}$ para todo $x \in (0, \pi)$, pelo Teorema de Fourier, haja vista que ela é uma função contínua neste intervalo com derivada seccionalmente contínua (na verdade, também contínua).

**+ 0, 3**