DM–IMECC–UNICAMP
Análise I
Prof. Marcelo M. Santos
3a. prova, 01/07/2009

Aluno: ____________________________ RA: ____________
Assinatura: _________________________________

<u>Observações</u>: *Tempo de prova: 100min; Justifique sucintamente todas as suas afirmações*; *Disponha as suas resoluções das questões nas folhas em branco na ordem crescente e da seguinte maneira:*
1a. Folha **- Questão 1;** ***2a. Folha*** **- Questão 2;**
3a. Folha **- Questão 3;** ***4a. Folha*** **- Questões 4 e 5.**
A última folha e o verso da folha de questões podem ser usados para rascunho.
Proibido usar calculadora. Não desgrampear a prova. Desligar o celular.

1. a) Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona não-crescente. Mostre que se $a \in X \cap X'_-$ então o conjunto $Y = f(X \cap (-\infty, a))$ é limitado inferiormente **(0,25 pontos)** e $\lim_{x \to a-} f(x) = \inf Y$. **(1,0 ponto).**

b) (1,25 pontos). Prove que a função $f(x) = \text{sen}(x^2)$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. *Se usar algum teorema, não esqueça de mencioná-lo.*

2. a) (0,5 pontos). Defina função derivável num ponto.

b) (0,5 pontos). Sejam f uma função de $X \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e $a \in X'$. Mostre que a existência do limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ é equivalente a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a} = 0$ para alguma constante c.

c) (1,5 pontos). Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Suponha que existam $f'(c)$ e $f''(c)$ num ponto crítico $c \in I$ (i.e. $f'(c) = 0$) e que $f''(c) < 0$. Prove que c é um ponto de máximo local, i.e. existe um número $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(c)$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

3. a) (0,5 pontos). Defina polinômio de Taylor e enuncie a fórmula de Taylor infinitesimal. **b) (0,5 pontos).** Defina função convexa.

c) (0,5 pontos). Enuncie a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

d) (0,5 pontos). Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável no intervalo aberto I. Um teorema diz que *f é convexa se, e somente se, para quaisquer $a, x \in I$ tem-se $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$* (ou seja, o gráfico de f está situado acima de qualquer de suas tangentes). Usando este resultado prove que se $f'' \geq 0$ então f é convexa.

4. (2,0 pontos). Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b), exceto possivelmente no ponto $c \in (a, b)$. Se existir $\lim_{x\to c} f'(x) = L$, prove que $f'(c)$ existe e é igual a L.

5. a) (1,0 ponto). Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ deriváveis no ponto a do intervalo aberto I tais que $f(a) = g(a) = 0$ e $g'(a) \neq 0$. Prove a *regra de L'Hôpital*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

b) (1,0 ponto). Enuncie e demonstre o 'Teste da Derivada de ordem n'.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!

Gabarito

Questão 1.

Item **a).** Como f é não-crescente, $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in X \cap (-\infty, a)$, logo, $f(a)$ é uma cota inferior para Y.

(**0,25 pontos** até aqui.)

Escrevamos $l = \inf Y$. Dado $\epsilon > 0$ (qualquer) pela definição de ínfimum, existe $x_1 \in X \cap (-\infty, a)$ tal que $l \leq f(x_1) < l + \epsilon$.

(+ **0,5 pontos** até aqui.)

Daí, tomando $\delta = a - x_1$ temos que se $x \in (a - \delta, a) = (x_1, a)$ e $x \in X$ então ($x_1 < x < a$, $x \in X$ e) $l \leq f(x) \leq f(x_1) < l + \epsilon$, pois $f(x) \in Y$, l é o ínfimum de Y e f é não-crescente. Assim, provamos que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a - \delta, a)$ implica em $|f(x) - l| < \epsilon$. Portanto, $\lim_{x\to a-} f(x) = l = \inf Y$. (V. definição de limite lateral.)

(+ **0,5 pontos**.)

Item **b).** Teorema do livro-texto: *Uma função* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua se, e somente se, para todo par de sequências* $x_n, y_n \in X$ *com* $\lim(x_n - y_n) = 0$ *tenha-se* $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Sejam $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ e $y_n = \sqrt{2n\pi}$. (+ **0,5 pontos** até aqui.)

Temos
$$\lim(x_n - y_n) = \lim \frac{\pi/2}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} + \sqrt{2n\pi}} = 0$$

(+ **0,25 pontos**.)

e

$$\lim(f(x_n) - f(x_n)) = \lim(\text{sen}(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) - \text{sen}2n\pi) = \lim 1 = 1 \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema acima, f não é uniformemente contínua.

(+ **0,5 pontos**.)

Questão 2.

Item **a)**. Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X \cap X'$. Dizemos que f é derivável no ponto a se existe o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. (**0,5 pontos**.)

Item **b)**. Suponhamos que exista o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f'(a)$. Então tomando $c = f'(a)$, temos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a} \frac{c(x-a)}{x-a} = f'(a) - c = 0.$$

(**0,25 pontos** até aqui.)

Reciprocamente, se $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a} = 0$ então o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, já que podemos escrever

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - c + c = \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{x-a} + c$$

(+ **0,25 pontos** até aqui.)

(Além disso, neste caso daí segue-se que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a} + c) = 0 + c = c$.)

c). <u>*Uma maneira*</u>: Como $f''(c) < 0$, por resultado visto em aula (do livro-texto) existe $\delta > 0$ tal que $f'(y) < f'(c) < f'(x)$ para quaisquer $x \in (c-\delta, c)$ e $y \in (c, c+\delta)$.

(**0,5 pontos** até aqui.)

Mas $f'(c) = 0$, por hipótese, então segue-se daí que f é estritamente crescente em $(c-\delta, c)$ e estritamente decrescente em $(c, c+\delta)$, donde podemos concluir que $f(x) < f(c)$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$.

(+ **1,0 ponto**.)

<u>*Outra maneira*</u> – Usando o fórmula de Taylor infinitesimal:

$$f(c+h) = f(c) + f'(c)h + \frac{f''(c)}{2}h^2 + r(h), \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0.$$

Daí, como $f'(c) = 0$, podemos escrever

$$(*) \qquad f(c+h) - f(c) = \left(\frac{f''(c)}{2} + \frac{r(h)}{h^2} \right) h^2.$$

(0,5 pontos.)

Como $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow |\frac{r(h)}{h^2}| < |\frac{f''(c)}{2}| = -\frac{f''(c)}{2}$; a última igualdade vem da hipótese $f''(c) < 0$.

(+ **0,5 pontos**.)

Logo $\frac{f''(c)}{2} + \frac{r(h)}{h^2} < 0$ se $|h| < \delta$ e então, devido a $(*)$, concluimos que $f(c+h) - f(c) < 0$ para todo h tal que $|h| < \delta$.

(+ **0,5 pontos**.)

3. a). Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável num ponto a do intervalo aberto I. O polinômio

$$p(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n$$

chama-se o polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a

(0,25 pontos.)

e a fórmula

$$f(a+h) = p(h) + r(h), \quad h \in \mathbb{R}; a+h \in I$$

com o resto $r(h)$ satisfazendo $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$ chama-se a fórmula de Taylor infinitesimal. (+ **0,25 pontos**.)

b). Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita convexa se

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

para quaisquer $x, a, b \in I$ tais que $a < x < b$. (O gráfico de f fica abaixo de qualquer uma das suas secantes.) **(0,5 pontos.)**

c). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função $n+1$ vezes derivável em (a,b) com $f^{(n)}$ contínua em $[a,b]$. A fórmula

$$\begin{aligned} f(b) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \end{aligned}$$

para algum $c \in (a,b)$ chama-se a fórmula de Taylor com resto de Lagrange. (**0,5 pontos**.)

d). <u>*Uma maneira*</u>: Se $f'' \geq 0$ então f' é não-decrescente. (**0,2 pontos**.)

Além disso, pelo Teorema do Valor Médio

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$$

para algum c entre a e x. Se $x < a$, temos $c < a$, logo, $f'(c) \leq f'(a)$ e $x-a < 0$, então, segue-se que $f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a)$; se $x > a$, temos $a < c$, logo, $f'(c) \geq f'(a)$ e $x - a > 0$, então, segue-se também que $f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a)$, ou seja, em qualquer caso, obtemos $f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a)$, i.e. $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Portanto, pelo teorema mencionado no enunciado da questão, concluimos que f é convexa. (+ **0,3 pontos**.)

<u>*Outra maneira*</u> – Usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

para algum c entre a e x. (**0,3 pontos**.)
Daí, como $f'' \geq 0$, por hipótese, obtemos $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Portanto, pelo teorema mencionado no enunciado da questão, concluimos que f é convexa. (+ **0,2 pontos**.)

4. Dado qualquer $x \in (a,b)$, $x \neq c$, pelo Teorema do Valor Médio, podemos escolher um y entre x e c tal que

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(y).$$

(**1,0 ponto**.)
Daí, basta mostrarmos que o limite $\lim_{x\to c} f'(y)$ existe e é igual a L.
(Note que y é uma função de x.) (+ **0,5 pontos**.)
Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim_{x\to c} f'(x) = L$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(*) \qquad x \in (a,b), |x-c| < \delta \Rightarrow |f'(x) - L| < \epsilon.$$

Como y está entre x e c, dado x nestas condições, temos também $y \in (a,b)$ e $|y-c| < \delta$, logo, de $(*)$ obtemos que $|f'(y) - L| < \epsilon$. Portanto,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ x \in (a,b), |x-c| < \delta \Rightarrow |f'(y) - L| < \epsilon$$

i.e. $\lim_{x\to c} f'(y) = L$. (+ **0,5 pontos**.)

5. a).

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

(**0,5 pontos**.)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\tfrac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\\ &= \frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.\end{aligned}$$

(+ **0,5 pontos**.)

b). 'Teste da Derivada de ordem n':

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no ponto a do intervalo aberto I. Suponhamos que $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 1, \cdots, n-1$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$. Então se n for par, a é um ponto de máximo local se $f^{(n)}(a) < 0$ e um ponto de mínimo local se $f^{(n)}(a) > 0$ e se n for ímpar, a não é um ponto nem de máximo local nem de mínimo local. (**0,4 pontos**.)

Demonstração: Pela fórmula de Taylor infinetsimal, com as hipóteses acima obtemos

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + r(h), \quad \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0,$$

(+ **0,2 pontos**.)

logo,

$$(*) \qquad f(a+h) - f(a) = \Big(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n}\Big)h^n.$$

(+ **0,2 pontos**.)

Daí, como $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n}$ tem o mesmo sinal de $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ para todo h com $|h| < \delta$. Então, pela fórmula $(*)$ e comparando o sinal de $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ com o sinal de h^n, concluimos o resultado.

(+ **0,2 pontos**.)