DM–IMECC–UNICAMP Prof. Marcelo Santos

Prova 3 de MA602–Analíse 2 – 24/06/2015

Gabarito e pontuação

Questão 1. a) (1,5) *Sejam $\{r_n\}$ ($n = 1, 2, \cdots$) um subconjunto de $\mathbb{R}$ enumerável e limitado (e.g. o conjunto dos números racionais em um intervalo limitado) e $u_n(x) = \frac{1}{2^n}|x - r_n|$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente em todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ e conclua daí que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x - r_n|$ define uma função contínua em $\mathbb{R}$.*

Resolução:

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado. Então $|u_n(x)| = \frac{1}{2^n}|x - r_n| \leq C\frac{1}{2^n}$ para quaisquer $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, onde $C = \sup X + \sup\{r_n\}$.

0,3 pontos até aqui

Daí, como a série $\sum 1/2^n$ é convergente (uma série geométrica de razão, 1/2, no intervalo $(-1, 1)$), pelo Teste M de Weierstrass, concluímos que a série $\sum u_n$ converge uniformemente em X. **+ 0,8 ponto**

Como cada cada função u_n é contínua e limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua, obtemos que f é uma função contínua em cada subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, logo, contínua em $\mathbb{R}$ (em cada ponto de $\mathbb{R}$).

+ 0,4

b) (1,0) *Para a função definida no item* **a)**, *mostre que não existe a derivada em nenhum ponto r_n.* Sugestão: Sejam $a = r_n$ e $h = f - u_n$. Mostre que existe $h'(a) = H(a)$, onde $H(a) = \sum_{m \neq n}(u_m)'(a)$.

Dado $\epsilon > 0$, seja $p > n$ ($p \in \mathbb{N}$) tal que

$$
(1)\quad \begin{array}{rl}
 & \left|\sum_{m\geq p}\left[\frac{u_m(a+s)-u_m(a)}{s} - (u_m)'(a)\right]\right| \\
\leq & \sum_{m\geq p}\frac{|u_m(a+s)-u_m(a)|}{|s|} + \sum_{m\geq p}|(u_m)'(a)| \\
\leq & \sum_{m\geq p}\frac{\frac{1}{2^m}\left||a+s-r_m|-|a-r_m|\right|}{|s|} + \sum_{m\geq p}\left|\frac{\pm 1}{2^m}\right| \\
\leq & \sum_{m\geq p}\frac{\frac{1}{2^m}|s|}{|s|} + \sum_{m\geq p}\frac{1}{2^m} \leq 2\sum_{m\geq p}\frac{1}{2^m} \leq \epsilon.
\end{array}
$$

0,5

Agora, seja $\delta > 0$ tal que para $|s| < \delta$ tenhamos

$$
(2)\ \sum_{\substack{m < p \\ m \neq n}} \left|\frac{u_m(a+s)-u_m(a)}{s} - (u_m)'(a)\right| < \epsilon.
$$

De (1) e (2), obtemos que

$$\left|\frac{h(a+s)-h(a)}{s} - H(a)\right| \leq \sum_{\substack{m < p \\ m \neq n}} \left|\frac{u_m(a+s)-u_m(a)}{h} - (u_m)'(a)\right| + \left|\sum_{m\geq p} \left[\frac{u_m(a+s)-u_m(a)}{s} - (u_m)'(a)\right]\right| < 2\epsilon$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \epsilon$, logo, existe a derivada $h'(a)$ $(= H(a))$.

+ **0,4**

Daí, como $f = h + u_n$ e u_n não é derivável em a (a função valor absoluto não é derivável na origem), concluímos que f não é derivável em a. + **0,1**

Questão 2. a) (0,5) *Enuncie o Teorema de aproximação de Weierstrass.*

Enunciado parcialmente correto: **0,25 pontos**

b) (2,0) *Sejam $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $P_n(x) = \sum_{k=0}^{m_n} a_{nk}x^k$ uma sequência de polinômios convergente uniformemente para f em [0,1]. Defina $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{m_n} \frac{a_{nk}}{k+1}x^{k+1}$ $(= \int P_n(x)dx)$. Mostre que a sequência $\{Q_n\}$ converge uniformemente (em $[0,1]$). Conclua daí que f tem uma primitiva (existe uma função g derivável em $[0,1]$ tal que $g' = f$ em $[0,1]$; $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in [0,1]$).*

$Q_n' = P_n$ converge uniformemente para f e $Q_n(0) = 0$ converge para zero. Então, pelo Teorema "de derivação termo a termo", temos que Q_n converge uniformemente para uma função g derivável e $g' = \lim Q_n'$ **1,0**
$= \lim P_n = f$. + **1,0**

Questão 3. *Seja $f : [0.1] \to \mathbb{R}$.*

a) (0,5) *Defina o polinômio de Bernstein B_n de f.*

Definição parcialmente correta: **0,25**

b) (0,5) *Mostre que $\sum_{k=0}^{n}(x - k/n)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{n}x(1-x)$, para quaisquer $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demosntração parcialmente correta: **0,25**
(Lema 9.2 do livro-texto.)

c) (1,5) *Seja $x_0 \in [0,1]$ e suponha que f seja limitada. Mostre que se $f(x) = 0$ para todo x numa vizinhança de x_0 então $B_n(x_0)$ converge para zero (quando $n \to \infty$).*

Seja $\delta > 0$ tal que $f = 0$ em $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [0,1]$.

$$|B_n(x_0)| = |\sum_{\{k\,;\,|(k/n)-x_0|\geq\delta\}} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{k}{n} x_0^k(1-x_0)^{n-k}|$$

0,5

$$\leq \tfrac{M}{\delta^2}\textstyle\sum_{k=0}^n \delta^2 \binom{k}{n} x_0^k(1-x_0)^{n-k}$$
$$\leq \tfrac{M}{\delta^2}\textstyle\sum_{k=0}^n (k/n - x_0)^2 \binom{k}{n} x_0^k(1-x_0)^{n-k}$$
$$= \tfrac{M}{n\delta^2} x_0(1-x_0)$$

+ **1,0**

onde $M = \sup|f|$ e usamos o item **b)**.

Questão 4. (2,5) *Sejam $c > 0$ e E_c o conjuntos das funções $f : [-1,1] \to [0,1]$ tais que $f(-1) = f(1) = 1$ e $|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|$ para quaisquer $x, y \in [-1,1]$. Mostre que existe uma função $f_c \in E_c$ tal que $A(f_c) \leq A(f)$ para toda $f \in E_c$, onde $A(f) := \int_{-1}^1 f(x)dx$.* Sugestão: Sejam $\mu_c = \inf_{f\in E_c} A(f)$ e $f_n \in E_c$ tal que $\mu_c \leq A(f_n) < \mu_c + 1/n$.

Sejam μ_c e f_n como na Sugestão.

Como as funções $f_n \in E_c$, elas são uniformemente limitadas por 1, pois tomam valores no intervalo $[0,1]$. **0,2**
Além disso, a sequência $\{f_n\}$ é equicontínua. De fato, dados $\epsilon > 0$ e $y \in [-1,1]$, definindo $\delta = \epsilon/c$, temos que δ independe de n e $|f_n(x) - f_n(y)| \leq c|x-y| \leq c\epsilon/c = \epsilon$ para todo $x \in [-1,1]$ tal que $|x-y| \leq \delta$. + **1,0**
Então, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência de $\{f_{n_k}\}$ convergindo uniformente para uma função contínua $f_c : [-1,1] \to \mathbb{R}$. + **0,5**
Como cada $f_n \in E_c$, temos que $f_n(-1) = f_n(1) = 1$, $0 \leq f_n \leq 1$ e $|f_n(x) - f_n(y)| \leq c|x-y|$ para todo n e quaisquer $x, y \in [-1,1]$. Daí, pela convergência de $\{f_{n_k}\}$ para f_c, temos também que $f_c(-1) = f_c(1) = 1$, $0 \leq f_c \leq 1$ e $|f_c(x) - f_c(y)| \leq c|x-y|$ para quaisquer $x, y \in [-1,1]$, i.e. $f_c \in E_c$. + **0,3**
Finalmente, pelas definições de μ_c e f_n, e pelo Teorema da "convergência uniforme" sobre a integral definida, concluímos que

$$\mu_c = \lim \int_{-1}^1 f_{n_k}(x)dx = \int_{-1}^1 f_c(x)dx.$$

+ **0,5**