DM–IMECC–UNICAMP

Prova 3 de MA141-Geometria Analítica – Turma Y — 23/05/2015

Gabarito/pontuação – Turma Y

Questão 1. (1,5 pt) *Seja S a esfera com centro $A = (1, -1, 0)$ e raio 2. Encontrar a equação de S: em coordenadas cartesianas e tambem nas coordenadas esféricas sendo a origem coincidente com o polo, o eixo polar — com o eixo Ox, e o outro eixo — coincidente com o eixo Oz.*

Resolução:

Em coordenadas cartesianas:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$$

0,5 pontos até aqui

Coordenadas cartesianas x, y, z em função das coordenadas esféricas r, θ, Φ:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \operatorname{sen}\Phi \\ y = r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\Phi \\ z = r\cos\Phi \end{cases}$$

+ 0,5 pontos

Equação da esfera em coordenadas esféricas:

$$\begin{array}{rcl} (r\cos\theta\operatorname{sen}\Phi - 1)^2 + (r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\Phi + 1)^2 + (r\cos\Phi)^2 & = & 4 \\ r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\Phi - 2r\cos\theta\operatorname{sen}\Phi + 1 & & \\ +r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\Phi + 2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\Phi + 1 + r^2\cos^2\Phi & = & 4 \\ -2r\cos\theta\operatorname{sen}\Phi + r^2\operatorname{sen}^2\Phi + 2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\Phi + r^2\cos^2\Phi & = & 2 \\ r^2 - 2r\cos\theta\operatorname{sen}\Phi + 2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\Phi & = & 2 \end{array}$$

+ 0,5

Questão 2. (3,5 pt) *Seja ℓ o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem*

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + 4\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 4 = 0.$$

a) *Identificar a cônica ℓ.*

Resolução:

$ac - b^2/4 = 5 \times 8 - 4^2/4 = 36 > 0$, logo, a cônica é uma elipse, um ponto, ou o conjunto vazio. **0,3**
Tomando $y = 0$, obtemos a equação $5x^2 + 4\sqrt{5}x + 4 = 0$ que tem duas raízes distintas, pois $\Delta = (4\sqrt{5})^2 - 4 \times 5 = 16 \times 5 - 20 > 0$, logo, a cônica não é um ponto nem o conjunto vazio. Portanto, é uma elipse. + **0,2**

b) *Encontrar as mudanças consecutivas das coordenadas que levam ℓ à forma canônica.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

0,2

<u>Autovalores</u>: $|A - \lambda| = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(5-\lambda)(8-) - 4 = 0$

$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$

$\lambda = (13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 36})/2 = (13 \pm 5)/2 = 4,\ 9$ + **0,3**

<u>Autovetores para $\lambda = 4$</u>: $(A-4)U = 0, \quad U = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a - 2b = 0$

$a = 2b$

$\therefore$ U$=\begin{bmatrix} 2b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\|U\|^2 = b^2(2^2 + 1^2) = 5b^2 \ \therefore \|U\| = 1 \Leftrightarrow |b|\sqrt{5} = 1,$ i.e. $b = \pm 1/\sqrt{5}$

Assim (pela teoria vista), temos que

$$U_1 := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é o vetor diretor de um dos eixos, digamos x', de um novo sistema de coordenadas cartesinas x', y' no qual a equação da cônica não terá o termo $x'y'$.

+ **0,5**

Para o vetor diretor do eixo y', sendo ele unitário e normal a U_1, podemos tomar

$$U_2 := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

+ **0,2**

As novas coordenadas $X' \equiv \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ se relacionam com as coordenadas $X \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ pela equação

$$X = QX', \qquad Q = [U_1 \ U_2] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

+ **0,2**

e a equação da cônica nas variáveis x', y' é

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + [4\sqrt{5} \ \ -16\sqrt{5}]\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X' + 4 = 0$

i.e. $4(x')^2 + 9(y')^2 + [-8 \ \ -36] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 4 = 0$

$4(x')^2 + 9(y')^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0$ + **0,2**

Fazendo o completamento de quadrados, obtemos

$$4[(x')^2 - 2x' + 1] - 4 + 9[(y')^2 - 4y' + 4] - 36 + 4 = 0, \quad 4(x'-1)^2 + 9(y'-2)^2 = 36,$$

$$\boxed{\tfrac{(x'-1)^2}{9} + \tfrac{(y'-2)^2}{4} = 1}$$

+ **0,2**

logo, escrevendo $\bar{x} = x' - 1$, $\bar{y} = y' - 2$ (uma translação), obtemos a equação

$$\frac{\bar{x}^2}{9} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$$

que é a elipse, na forma canônica nas variáveis $\bar{x}, \bar{y}$. + **0,2**

c) *Encontrar a excentricidade de ℓ. Encontrar também as coordenadas dos focos e dos vértices, e as equações das assíntotas no sistema Oxy (se aplicável). Fazer um esboço do gráfico de ℓ.*

$$a = 3, \quad b = 2, \quad c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5, \quad c = \sqrt{5}, \quad e = c/a, \quad \boxed{e = \sqrt{5}/3}$$

0,2

No sistema $\bar{x},\bar{y}$, temos que os focos são $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{5}, 0)$ e os vértices são dados por $\bar{y} = 0$, logo, usando a equação na forma canônica obtida, obtemos que os vértices são os pontos $\bar{x} = \pm 3,\ \bar{y} = 0$. + **0,2**
No sistema x', y' ($x' = \bar{x} + 1,\ y' = \bar{y} + 2$) temos que os focos e os vértices são então dados, respectivamente, por

$$\boxed{(1 \pm \sqrt{5}, 2)} \quad \text{e} \quad \boxed{(1 \pm 3, 2) = (4, 2),\ (-2, 2)}$$

+ **0,2**

No sistema x, y, obtemos:
<u>focos</u>:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2+2\sqrt{5}-2 \\ 1+\sqrt{5}+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2\sqrt{5} \\ 5+\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{5}+1 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2-2\sqrt{5}-2 \\ 1-\sqrt{5}+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2\sqrt{5} \\ 5-\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{5}-1 \end{bmatrix};$$

<u>vértices</u>:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 8-2 \\ 4+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{4}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -4-2 \\ -2+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

+ **0,2**

Gráfico ... + **0,2**

Questão 3. (2 pt) *Encontrar a equação (em coordenadas cartesianas) da superfície de revolução S obtida quando a curva c: $x^2 - 2z^2 + 4z = 6$, $y = 0$, gira em torno do eixo Ox.*

A equação é dada por

$$\operatorname{dist}((x, y, z), \text{eixo } x) = \operatorname{dist}((x, 0, z'), \text{eixo } x)$$

em que o ponto $(x, 0, z')$ é um ponto da curva no paralelo em que encontra-se o ponto genérico da superfície (x, y, z). Daí, obtemos a equação,

$$\sqrt{y^2 + z^2} = |z'|, \quad \text{i.e.} \quad z' = \pm\sqrt{y^2 + z^2},$$

o que, substituindo na equação da curva $x^2 - 2(z')^2 + 4z' = 6$, nos dá

$$x^2 - 2y^2 - 2z^2 \pm 4\sqrt{y^2 + z^2} = 6$$

2,0

Questão 4. (1,5 pt) *A superfície S tem equação em coordenadas cilindricas $r = 3\cos\theta$. Encontre a equação de S em coordenadas cartesianas. Quem é S?*

Relação entre coordenadas cartesianas x, y, z e coordenadas cilíndricas r, θ, z:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\text{sen}\theta, \quad z = z\,. \qquad \mathbf{0},2$$

Multiplicando a equação dada por r, obtemos $r^2 = 3r\cos\theta$ + **0,3**
donde temos

$$x^2 + y^2 = 3x \qquad + \mathbf{0},\mathbf{5}$$

Completando quadrado, podemos reescrevê-la como

$$(x - 3/2)^2 + y^2 = 9/4.$$

Daí concluímos que S é um cilindro circular de raio $3/2$ e eixo $x = 3/2$, $y = 0$. + **0,5**

Questão 5. (1,5 pt) *Obtenha a equação do lugar geometrico dos pontos que estão a distancia 1 da reta $l\ :\ x = 2,\ y = 4$. Que tipo de quadrica é?*

$$\text{dist}\left((x, y, z), l\right) = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 \qquad \mathbf{0},\mathbf{5}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 1 \qquad + \mathbf{0},\mathbf{5}$$

Cilindro circular com raio 1 e eixo $x = 2, y = 4$. + **0,5**