DM–IMECC–UNICAMP, MA720/Análise no $\mathbb{R}^n$, Prof. Marcelo M. Santos,
3a. prova, 27/11/2013
Aluno: ________________________________ RA: __________
Assinatura como no RG: ____________________________

Justifique (de forma sucinta) todas as suas afirmações.

Questão 1. a) (0,5 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ a aplicação dada por $f(x,y) = x$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^k$. Calcule $Jf(x,y)$ e mostre que $f'((x,y))$ é uma aplicação sobrejetiva, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^n$.

b) (0,5) Mostre que f é uma aplicação aberta, i.e. $f(A)$ é um conjunto aberto (em $\mathbb{R}^m$) para qualquer conjunto aberto A (em $\mathbb{R}^n$).

c) (1,0) Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma submersão de classe C^1, i.e. uma aplicação de classe C^1 tal que $g'(p)$ é sobrejetiva, para qualquer $p \in \mathbb{R}^n$. Mostre que g é uma aplicação aberta.

2. a) (1,0) Mostre que se $m < n$ então o $\mathbb{R}^m$ visto como um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ tem medida nula.

b) (1,0) Mostre que se U é um aberto do $\mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação lipschitziana e $m < n$, então a imagem $f(U)$ tem medida nula (em $\mathbb{R}^n$). Conclua que toda hiperfície de classe C^1 do $\mathbb{R}^n$ tem medida nula.

3. (2,0) Use o Teorema de Fubini para mostrar que

$$\int_{[a,b]^n} \mathrm{e}^{-|x|^2} dx = \left(\int_a^b \mathrm{e}^{-t^2} dt \right)^n$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. ($[a,b]^n$ denota o cubo n-dimensional $[a,b] \times \cdots \times [a,b]$.)

4. (2,0) Uma forma (diferencial) ω é dita *fechada* quando $d\omega = 0$ e *exata* quando $\omega = d\alpha$ para alguma outra forma α. Seja $\omega(x) = f(x) dx_1 \wedge dx_2$ ($x = (x_1, x_2)$) uma 2-forma de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ (i.e. f é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$). Mostre que ω é fechada. Defina $\alpha(x) = \left(\int_0^1 t f(tx) dt \right) x_1\, dx_2 - \left(\int_0^1 t f(tx) dt \right) x_2\, dx_1$. Mostre que $d\alpha = \omega$. <u>*Dica*</u>: calcule $\frac{d}{dt}[t^2 f(tx)]$.

5. Opcional

a) (0,5) Defina variedade (superfície) em $\mathbb{R}^n$.

b) (0,5) Defina variedade orientável.

c) (1,0) Seja $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ uma $n-1$ forma em $\mathbb{R}^n$, onde o símbolo $\widehat{\ }$ em $\widehat{dx_i}$ significa que esse termo é omitido. (Toda $n-1$ forma em $\mathbb{R}^n$ se escreve dessa maneira.) Se M é uma hiperfície no $\mathbb{R}^n$ parametrizada por $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, mostre que

$$\int_M \omega = \int_U \det \left(F(\varphi(u)), \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}} \right) du\,,$$

onde $F = (F_1, \cdots, F_n)$.

Boa prova!