DM–IMECC–UNICAMP
Análise I
Prof. Marcelo M. Santos
Prova de Segunda Chamada, 08/07/2009

Aluno: ____________________________ RA:____________
Assinatura: __________________________________

Observações: *Tempo de prova: 100min; Justi que sucintamente todas as suas a rmacoes*; ***Disponha as suas resoluções das questões nas folhas em branco em ordem crescente e sendo cada questão em uma folha (frente e verso).*** *A ultima folha e o verso da folha de questoes podem ser usados para rascunho.* **Proibido usar calculadora. Não desgrampear a prova. Desligar o celular.**

Escolha 4 (quatro) questões, sendo duas do grupo da matéria correspondente à sua nota mais baixa ou da prova a qual não compareceu e uma de cada um dos outros grupos.

Grupo I – Matéria da Primeira Prova

Questão 1. a) (1,5 pontos). Defina i) conjunto finito, ii) conjunto enumerável e iii) supremo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, justificando porque ele existe.

b) (1,0 ponto). Prove que o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

c) (0,5 pontos). Prove, usando o princípio da indução, a *desigualdade de Bernoulli*: $(1+x)^n \geq 1+nx$, válida para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$ em $\mathbb{R}$.

Questão 2 (2,5 pontos). Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, prove que $\sum (-1)^n a_n^2$ converge.

Grupo II – Matéria da Segunda Prova

Questão 3. a) (1,5 pontos). Defina i) conjunto aberto, ii) conjunto compacto e iii) ponto de acumulação.

b) (0,5 pontos). Descreva o conjunto de Cantor K escrevendo-o como uma interseção $K = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$, explicitando brevemente cada F_n como uma união finita de intervalos fechados.

c) (0,5 pontos). Determine quais dentre os números $1/2$, $1/3$ e $1/7$ pertencem ao conjunto de Cantor. *Nao esqueca de justi car, o numero pertencendo ou nao ao conjunto.*

c) (0,5 pontos). Mostre que a função $f(x) = \text{sen}(1/x)$ não possui limite quando $x \to 0+$.

Questão 4 (2,5 pontos). Seja $f : [0, 2) \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f|(1, 2)$ é lipschitziana. Prove que f é uniformemente contínua.

Grupo III – Matéria da Terceira Prova

Questão 5. Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$.

a) (1,5 pontos).

i) Defina a derivada $f'(a)$ da função f no ponto a, quando existe;

ii) Mostre que se f é derivável (se a derivada existe) no ponto a então f é contínua no ponto a;

iii) Mostre que se a é um ponto d acumulação bilateral e $f'(a) > 0$ então existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(a) < f(y)$ para quaisquer $x \in X \cap (a - \delta, a)$ e $y \in X \cap (a, a + \delta)$.

b) (0,5 pontos). Falso ou verdadeiro?

i) Se $f'(a) \neq 0$ então f é monótona numa vizinhança de a;

ii) Se f é monótona numa vizinhança de a, não necessariamente estritamente monótona, e existir $f'(a)$ então $f'(a) \neq 0$.

No caso verdadeiro, prove, e no caso falso, dê um contra-exemplo.

c) (0,5 pontos). Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável. Mostre que se $f'' \geq 0$ então f é uma função convexa.

Questão 6 (2,5 pontos). Mostre que a função $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = -1$ se $-1 \leq x \leq 0$ e $h(x) = 1$ se $0 < x \leq 1$ não possui uma *primitiva* (ou *antiderivada* ou *integral inde nida*) i.e. não existe uma função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f' = h$.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!

Gabarito

Questão 1. **a)** Cada subitem vale (**0,5 pontos**).

i) Um conjunto X (qualquer) é dito finito quando é vazio ou existe uma bijeção $f : I_n \to X$, para algum $n \in \mathbb{N}$, onde I_n é o conjunto de números naturais $\{1, 2, \cdots, n\}$;

ii) Um conjunto X (qualquer) é dito enumerável quando é finito (**0,1 pontos**) ou existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$;

iii) Um dos axiomas dos números reais (talvez o principal) é que todo conjunto limitado superiormente possui uma menor cota superior, a qual chama-se supremo.

b) Sejam X e Y conjuntos enumeráveis. Pela definição de conjunto enumerável, existem sobrejeções $f : \mathbb{N} \to X$, $g : \mathbb{N} \to Y$ (no caso finito, estenda e.g. $f : I_n \to X$ pondo $f(x) = f(n)$ para $x > n$; no caso infinito, temos uma bijeção). (**0,5/3 pontos** até aqui.)
Daí temos que a função $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto (f(n), g(m)) \in X \times Y$ é uma sobrejeção (de fato, como f e g são sobrejeções, $(x, y) \in X \times Y \Rightarrow x = f(n), y = g(m),\ \exists\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$). Então basta mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, pois vimos um resultado que diz que se A é um conjunto enumerável e existe uma sobrejeção $A \to B$ então B é enumerável.
(+ **0,5/3 pontos**)
A função $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $h(n, m) = 2^n \cdot 3^m$ é injetiva, haja vista a unicidade da decomposição em fatores primos, logo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, pois também vimos um resultado que diz que se B é um conjunto enumerável e existe uma injeção $A \to B$ então A é enumerável. (+ **0,5/3 pontos**)

c)

$\underline{n = 1}$: $(1 + x) = 1 + x$; (**0,1 pontos**)

Hipótese da Indução: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$; (**0,1 pontos**)

Tese da Indução, $(1 + x)^n \geq 1 + nx \Rightarrow (1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$/Prova:

$$
\begin{aligned}
(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n \cdot (1 + x) \\
&\geq (1 + nx) \cdot (1 + x) \\
&= 1 + nx + x + nx^2 \\
&\geq 1 + nx + x \\
&= 1 + (n + 1)x\,.
\end{aligned}
$$

onde usamos a definição de potência (com expoente natural), a Hipótese da Indução, e propriedades dos (das operações com) números reais; em particular, usamos que $x \geq -1 \Rightarrow 1 + x \geq 0$ e que $nx^2 \geq 0$. (+ **0,3 pontos**)

Questão 2. Como $\sum a_n$ é absolutamente convergente, temos $\lim |a_n| = 0$, logo existe n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < 1$ (**0,5 pontos** até aqui) e daí, $|(-1)^n a_n^2| = a_n^2 \leq |a_n|$ para todo $n > n_0$, (+ **0,5 pontos**) logo, $\sum(-1)^n a_n^2$ é absolutamente convergente, pelo Teste da Comparação, (+ **1,0 ponto**) e, portanto, convergente, pois toda série absolutamente convergente é convergente. (+ **0,5 pontos**)

Questão 3. **a)** Cada subitem vale **0,5 pontos**

i) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito aberto se para todo $a \in X$ existe um $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset X$;

ii) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito compacto se ele é fechado e limitado.

iii) Um ponto a de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito um ponto de acumulação de X se para todo $\epsilon > 0$, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap X - \{a\} \neq \emptyset$.

b) O conjunto de Cantor K é obtido indutivamente retirando-se o terço médio 'aberto' (sem as suas extremidades) de cada intervalo restante, iniciando-se com o intervalo $[0, 1]$, (**0,25 pontos**) de forma que $K = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$, onde cada A_n é uma união finita de intervalos compactos da forma $[\frac{m-1}{3^n}, \frac{m}{3^n}]$, (+ **0,25 pontos**) $m \in \mathbb{N}$ $(m \leq 3^n)$.

c). (Denotemos por K o conjunto de Cantor.) $1/2 \notin K$, pois $1/2 \in (1/3, 2/3)$, intervalo retirado na construção do conjunto de Cantor;

(**0,5/3 pontos**)

$1/3 \in K$, pois é uma extremidade de um intervalo retirado;

(**0,5/3 pontos**)

$1/7 \notin K$, pois na base 3, $1/7 = 010212010212\cdots$ (v. livro-texto) não pode ser escrito sem conter o algarismo 1 *ou* $1/7 \in (1/9, 2/9)$, intervalo retirado.

(**0,5/3 pontos**)

d) Sejam (x_n) e (y_n) sequências definidas por $1/x_n = 2n\pi + \pi/2$ e $1/y_n = 2n\pi + \pi$. (**0,1 pontos**) Temos $x_n, y_n > 0$, $\lim_{x_n} = \lim \frac{1}{2n\pi+\pi/2} = 0$, $\lim_{y_n} = \lim \frac{1}{2n\pi+\pi} = 0$, (**0,1 pontos**) mas $\lim f(x_n) = \lim 1 = 1 \neq \lim f(y_n) = \lim 0 = 0$, logo, não pode existir o limite $\lim_{x\to 0+} f(x)$, tendo em vista a caracterização de limites de funções via sequências. (**0,3 pontos**)

Questão 4. $f|[0, 1]$ é uniformemente contínua, pois é restrição de uma função contínua a um conjunto compacto; (**0,7 pontos** até aqui.)
$f|(1, 2)$ é uniformemente contínua, pois toda função lipschitziana é uniformemente contínua (exemplo do livro-texto e visto em aula). (+ **0,7 pontos**.)

Daí, podemos concluir que $f|[1,2)$ também é uniformemente contínua.

Seja $\epsilon > 0$. Como $f|[0,1]$ é uniformemente contínua, existe um $\delta_1 > 0$ tal que $x, y \in [0,1]$, $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon/2$. Analogamente, existe um $\delta_2 > 0$ tal que $x, y \in [1,2)$, $|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon/2$. Daí, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos: (+ **0,7 pontos** para esta parte deste parágrafo.)

$$|x-y| < \delta \text{ e } x, y \in [0,1] \text{ ou } x, y \in (1,2) \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

(**0,2 pontos**)

e

$$\begin{aligned} & |x-y| < \delta, x \in [0,1] \text{ e } y \in (1,2) \\ \Rightarrow \quad & |f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(1)| + |f(1)+f(y)| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon\,. \end{aligned}$$

(**0,2 pontos**)

Para a penúltima desigualdade usamos que $|x-y| < \delta, x \in [0,1]$ e $y \in (1,2) \Rightarrow |x-1| < \delta \leq \delta_1$ e $|1-y| < \delta \leq \delta_2$.

Questão 5. a) Cada subitem vale **0,5 pontos**.

i) $f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, quando este limite existe;

ii) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a)\right)$
$= \lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}) \cdot \lim_{x\to a}(x-a) + \lim_{x\to a} f(a)$
$= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)\,;$

iii) Como $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, por resultado de permanência do sinal do limite, temos que existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, |x-a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, logo,

$$x \in X \cap (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) - f(a) < 0$$

(note que $x \in X \cap (a-\delta, a) \Rightarrow x - a < 0$) e

$$x \in X \cap (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) - f(a) > 0$$

logo, $x \in X \cap (a-\delta, a)$ e $y \in X \cap (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y)$.

b) Cada subitem vale **0,5 pontos**.

i) Falso: A função definida por $f(x) = x^2\text{sen}(1/x) + x/2$ se $\neq 0$ e $f(0) = 0$ satisfaz $f'(0) = 1$ e f não é monótona em nenhuma vizinhança da origem. (Exemplo do livro e visto em aula.)

ii) Falso: A função $f(x) = x^3$ satisfaz $f'(0) = 0$ e f é crescente.

c) Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, dados $x, a \in [a, b]$ quaisquer, temos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$$

para algum c entre x e a, logo, como por hipótese, $f'' \geq 0$, segue-se que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$; portanto, por teorema, f é convexa.

(**0,5 pontos**)

Questão 6. Se f existisse, teríamos

$$f'(0) = h(0) = -1 \ < \ 0 \ < \ f'(1) = h(1) = 1, \qquad (\textbf{1,0 ponto})$$

logo, pelo Teorema de Darboux, existiria $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = h(c) = 0$ (**1,0 ponto**).

Mas $h(x) \neq 0$ para todo $x \in [-1, 1]$

(**0,5 pontos**)

(h só assume os valores ± 1) então h não possui uma primitiva.