

Aluno: _____ RA: _____

Assinatura (idêntica à do RG): _____

Observações: *Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligue o celular! Não destaque o grampo da prova.*

1. a) (1,0 ponto) Calcule o limite da sequência $\arctg(\frac{n+2}{n})$.

b) (1,0 ponto) Calcule a soma da série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}}$.

2. a) (1,0 ponto) Resolva a EDO $y(2x + y)dx + x(x + 2y)dy = 0$.

b) (1,0 ponto) Encontre a solução geral da EDO $y'' + y = x + e^{-x}$.

3. (2,0 pontos) Encontre a solução geral em série de potências de x da EDO $(x^2 + 1)y'' + y'' + y = 0$: dê a relação de recorrência e uma cota inferior para o raio de convergência da solução.

4. a) (0,5 pontos) Calcule a Transformada de Laplace da função $f(t) = t \cos 2t$.

Dados: $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$; $\mathcal{L}[(-t)^n f(t)] = \frac{d^n}{ds} \mathcal{L}[f(t)]$.

b) (1,5 pontos) Resolva o sistema abaixo pelo método de autovalores e autovetores:

$$\begin{cases} (x_1)' = 4x_1 \\ (x_2)' = x_1 + 4x_2 + x_3 \\ (x_3)' = x_1 + x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

5. Considere a EDP (*equação de Laplace*) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ no retângulo $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$. Encontre uma sequência de soluções de variáveis separadas $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$, $n = 1, 2, \dots$, satisfazendo as condições de contorno $u_n(0, y) = u_n(\pi, y) = u_n(x, \pi) = 0$, as quais sejam L.I. (i.e. $\sum c_n u_n = 0 \Rightarrow c_n = 0$).

Dica: Procure soluções por separação de variáveis $u(x, y) = X(x)Y(y)$, transforme a EDP em duas EDOs dependentes de um parâmetro comum λ e, em seguida, imponha as condições de contorno para determinar uma sequência de valores para o parâmetro – autovalores de um problema de contorno.

BOA PROVA!