DM–IMECC–UNICAMP, MA502/Análise I, Prof. Marcelo M. Santos
Prova de segunda chamada, 02/07/2012
Aluno: ____________________________ RA: ____________
Assinatura, como no RG: __________________________________
Observações: *Tempo de prova: 100min; Justifique sucintamente todas as suas afirmações.*

1. a) (0,5 pontos) Defina limite de uma sequência. **b) (0,5) Usando a definição de limite**, prove que se $\lim x_n = L$ e $\lim y_n = M$ então $\lim(x_n + y_n) = L + M$ (onde (x_n) e (y_n) são sequências de números reais e $L, M \in \mathbb{R}$).

c) (0,5) Defina supremo. **d) (0,5)** Seja (x_n) uma sequência limitada de números reais. **Usando a definição de supremo**, prove que $\sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = \lim x_{n_k}$ para alguma subsequência (x_{n_k}).

2. a) (0,4) Falso ou verdadeiro: a soma de uma série divergente com uma convergente é uma série divergente. (*Não esqueça de justificar: se a afirmação for verdadeira, prove; se for falsa, dê um contra-exemplo.*)

b) (1,0) Seja $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}$. Prove que $a_n > 0$ (para todo $n \in \mathbb{N}$), $\lim a_n = 0$, mas a série alternada $\sum(-1)^n a_n$ é divergente. (*Sugestão*: $(-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.)

c) (0,6) Por que o resultado do item **a)** não contradiz o Teorema de Leibniz (o Teste da Série Alternada)? (*Não esqueça de provar suas afirmações.*) Enuncie o Teorema de Leibniz.

3. (2,0) Prove que a função $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ não é lipschitziana (não existe uma constante K tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$).

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. **a) (1,5) Sem usar integral**, prove que se $f'(x) \geq c$ para todo $x > a$ então $f(x) \geq c(x - a) + f(a)$ para todo $x \geq a$. Aqui, c e a são constantes reais arbitrárias.

b) (0,5) Usando o resultado do item **a)**, conclua que se f for limitada superiormente então f' é ilimitada inferiormente.

5. (2,0) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável (existe $f''(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Prove que se $f'' \geq 0$ $(f''(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R})$ então $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$, para quaisquer $x, a \in \mathbb{R}$.

Não esqueça de justificar todas as suas afirmações.
Boa prova!