DM–IMECC–UNICAMP
Análise I
Prof. Marcelo M. Santos
2a. prova, 20/05/2009

Aluno: ____________________________ RA: ____________
Assinatura: _________________________________

<u>Observações</u>: *Tempo de prova: 100min; Justifique sucintamente todas as suas afirmações*; *Disponha as suas resoluções das questões nas folhas em branco na ordem crescente e da seguinte maneira:*
1a. Folha - Questão 1; 2a. Folha - Questão 2;
3a. Folha - Questão 3; 4a. Folha - Questões 4 e 5.
A última folha e o verso da folha de questões podem ser usados para rascunho.
Proibido usar calculadora. Não desgrampear a prova. Desligar o celular.

1. **a) (1,0 ponto.)** Se existem $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\epsilon \leq x_n \leq n^k$ para todo n suficientemente grande, prove que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$. Use este fato para calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k}$.
   b)(1,0 ponto.) Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então $\sum a_n^2$ converge.
   c) Difícil! (0,5 pontos.) Sejam $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Prove que $\lim x_n = 2$. (*Não pode usar resultado de exercício.*)

2. **(2,5 pontos.)** Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto fechado não vazio e sem pontos isolados. Prove que X não é enumerável.

3. **a) (2,0 pontos.)** Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ então$L \leq M$.
   b) (0,5 pontos.) Dê um exemplo em que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ e ocorre a igualdade $L = M$.

4. **(2,5 pontos.)** Demonstre o Teorema: *A imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ por uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.*

5. **(1,0 ponto.)** Determine o limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n3^n}$.
   (*Não pode usar resultado de exercício.*)

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.
Boa prova!

Gabarito

Não se aprende Análise (Matemática) estudando a matéria de maneira superficial, só memorizando conceitos e resultados. Além disso, deve-se saber todas as demonstrações dadas em aula e fazer exercícios. Espera-se que, **no mínimo**, *o aluno faça todos os exercícios selecionados. Uma quantidade razoável de horas semanais deve ser dedicada à matéria, e.g. de oito a dez horas. Não se aprende também estudando de última hora!*

Questão 1. (**Objetivo: Avaliação da aprendizagem do aluno sobre a última parte da matéria dada sobre sequências e séries.**)

Item **a)**. (**Exercício 11 dos exercícios selecionados sobre os Cap. 3 e 4.**)

$$\sqrt[n]{\epsilon} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq (\sqrt[n]{n})^k$$

Como vimos em aula (v. também livro-texto), $\lim \sqrt[n]{\epsilon} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$, logo, $\lim(\sqrt[n]{n})^k = (\lim \sqrt[n]{n})^k = 1$ (limite de produto; $k \in \mathbb{N}$) e, pelo Teorema do Sanduíche, concluimos que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$.

(**0,7 pontos** até aqui.)

Se $n \geq k$ e $n \geq 2$, temos $1 < n + k \leq 2n \leq n^2$, logo, pelo que foi provado (com 'k'$= 2$) concluimos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k} = 1$. (+ **0,3 pontos**.)

b) (**Exercício 9 dos exercícios selecionados sobre os Cap. 3 e 4.**)

$$\sum a_n \text{ absolutamente convergente } \Rightarrow |a_n| < 1$$

para $n >> 1$ (pois $\lim a_n = 0$) logo, $|a_n|^2 < |a_n|$ para todo $n >> 1$. Daí, pelo Teste da Comparação, temos que $\sum a_n^2$ é convergente. (+ **1,0 ponto**.)

c) (**Caso particular do exercício 12 dos exercícios selecionados sobre os Cap. 3 e 4.**)

Vejamos por indução que $\sqrt{2} \leq x_n < x_{n+1} \leq 2$ para todo n:
Para $n = 1$, $\sqrt{2} = x_1$, pela definição de x_1, e, pela definição de x_2 temos

que $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$, pois $\sqrt{2} > 0$, e, usando que $x_2 > 0$ (pois $x_2 > \sqrt{2} > 0$) temos que

$$x_2 \leq 2 \Leftrightarrow x_2^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 2+\sqrt{2} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2$$

logo (como sabemos a última desigualdade é verdadeira) temos a tese acima quando $n = 1$. Suponhamos que ela seja verdadeira para um n arbitrário (hipótese da indução). Então $x_{n+1} := \sqrt{2+x_n} \geq \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2 \geq \sqrt{2}$ e, analogamente, $x_{n+2} \geq \sqrt{2}$, e, usando que x_{n+1} e x_{n+2} são não-negativos (pois sao maiores do que $\sqrt{2}$) e usando também as definições de x_{n+1} e de x_{n+2}, temos que

$$\begin{aligned} x_{n+1} < x_{n+2} \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_{n+1}^2 < x_{n+2}^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 2+\sqrt{x_n} < 2+\sqrt{x_{n+1}} \leq 4 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x_n} < \sqrt{x_{n+1}} \leq 2 \end{aligned}$$

logo (como a última desigualdade é verdadeira pela hipótese da indução) temos a tese acima com $n+1$ no lugar de n. ∎ (+ **0,3 pontos**.)

Pela desigualdade acima, temos que a sequência é monótona (crescente) e limitada, logo tem um limite $l = \lim x_n$ e $l \geq \sqrt{2}$. Daí, como x_{n+1} é uma subsequência, tem o mesmo limite e, tomando o limite na igualdade $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$ obtemos que l é raiz da equação $x^2 - x - 2 = 0$, donde $l = 2$ ou $l = -1$. Esta última possibilidade está descartada, pois já sabemos que $l \geq \sqrt{2}$. Portanto $l = 2$. (+ **0,2 pontos**.)

Questão 2. (**Questão sobre o Capítulo 5 – Algumas Noções Topológicas. Envolve os conceitos de conjuntos fechado, compacto, pontos isolados, e a demonstração foi dada em aula e está no livro-texto, na parte das propriedades sobre o conjunto de Cantor.**)

Seja $\{x_1, x_2, \cdots\}$ uma enumeração qualquer de pontos de X. Vejamos que existe um ponto c em X que não está nesta enumeração, logo, X não é enumerável, pois a enumeração que tomamos é arbitrária. (*Repetiremos o que foi dado e em aula está no livro-texto na parte das propriedades sobre o conjunto de Cantor.*)

Seja I_1 um intervalo compacto de comprimento menor do que 1 contendo um ponto de X e não contendo x_1. Isto é possível, pois $X \neq \emptyset$ e X não contém pontos isolados (em particular, tem infinitos pontos). Pela mesma razão, existe um outro intervalo I_2 compacto de comprimento menor do que

1/2 contido em I_1, contendo um ponto de X e não contendo x_2. Procedendo assim, indutivamente obtemos uma sequência de intervalos compactos encaixados $I_1 \supset I_2 \supset \cdots I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$ tais que o comprimento de cada I_n é menor do que $1/n$, cada I_n contém um ponto de X e $x_n \notin I_n$ qualquer que seja n. Pelo 'Teorema dos Compactos (Intervalos) Encaixados', existe $c \in \cap I_n$. Como $I_n \cap X \neq \emptyset$, para cada n existe $y_n \in I_n \cap X$ e, como o comprimento de I_n é menor do que $1/n$ e $c \in \cap I_n$, temos que $\lim y_n = c$ ($|y_n - c|$ é menor ou igual ao comprimento de I_n). Mas X é fechado, então $c \in X$ e $c \neq x_n$ qualquer que seja n, pois $c \in I_n$ para todo n e $x_n \notin I_n$. ∎

(+ **2,5 pontos** até aqui.)

Questão 3. a) (Questão sobre o Capítulo 6 – Limites de Funções. Exercício 2 dos exercícios selecionados sobre os Cap. 6 e também um Corolário no livro-texto.)

Se fosse $L > M$ então, por um Teorema visto em aula (do livro-texto) teríamos $g(x) < f(x)$ para todo $x \in X$ numa vizinhança de a, ou seja, existiria um $\delta > 0$ tal que $g(x) < f(x)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, mas isto seria uma uma negação da hipótese $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$. Portanto, $L \leq M$. (**2,0 pontos**.)

b) Exemplo (um exemplo): $f(x) = 0$, $g(x) = x$, $x \in X = (0, 1)$, $a = 0$.

(+ **0,5 pontos**.)

Questão 4. (**Questão sobre o Capítulo 7 – Funções Contínuas. Teorema do livro-texto e dado (demonstrado) em aula.)**

Repetiremos o que foi dado em aula e também está no livro-texto. Vimos (no capítulo 5) que um conjunto é compacto se, e somente se, é 'sequencialmente compacto', i.e. toda sequência de pontos do conjunto tem uma subsequência que **converge** para um ponto **do conjunto**. Vamos usar este resultado (Teorema) para provar que $f(X)$ é compacto, se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua:

Seja (y_n) uma sequência qualquer de pontos de $f(X)$, i.e. $y_n = f(x_n)$ com $x_n \in X$. Sendo X compacto, pelo resultado mencionado, existe uma subsequência (x_{n_k}) e um ponto $x_0 \in X$ tal que $\lim x_{n_k} = x_0$. Daí, sendo $f : X \to \mathbb{R}$ contínua, temos $\lim f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Mas $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$, logo, a subsequência (y_{n_k}) converge e converge para o ponto $f(x_0)$, o qual pertence

$f(X)$. Portanto, usando novamente o resultado mencionado, concluimos que $f(X)$ é compacto. ∎ (**2,5 pontos**.)

<u>**Questão 5.**</u> (**Questão sobre limites infinitos. Caso particular do exercício 17 dos exercícios selecionados sobre os Cap. 3 e 4.**)

Seja $x_n = \dfrac{n3^n}{n!}$. (A sequência dada é $1/x_n$.) Calculando o limite da razão x_{n+1}/x_n, temos:

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{(n+1)3^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n3^n} = \lim \frac{1}{n}3 = 0\,.$$

Daí temos que $\lim x_n = 0$ pois, e.g. pelo Teste da Razão a série $\sum x_n$ é convergente, logo seu termo geral tende para zero, ou usamos o exemplo 8 do Cap.3 do livro-texto (veja também o exemplo 9). Sendo $\lim x_n = 0$, temos $\lim 1/x_n = \infty$, ou seja, $\lim \dfrac{n!}{n3^n} = \infty$. (**1,0 ponto**.)