DM–IMECC–UNICAMP – Geometria Analítica e Vetores - MA141 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **2a. prova, 17/05/2010**

Aluno: ____________________________ RA: ____________

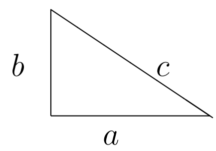
Assinatura (idêntica à do RG): _________________________________

Observações: ***Justifique sucintamente todas as suas afirmações.***
É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico;
em particular do celular ou calculadora.
Desligar o celular! Não destaque o grampo da prova.

Questão 1. a) (1,5 pontos). Determine, se existir, os valores de x para que o vetor $\vec{u} = x\vec{i} + \vec{k}$ seja paralelo ao produto vetorial de $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j} - 2\vec{k}$ por $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

b) (1,0 ponto). **Usando vetores**, prove o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



2. a) (1,5 pontos). Mostre (**usando resultado(s)/teorema(s) visto(s) em aula**) que os vetores $\vec{u} = (1, 3, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, -2, 1)$ não são coplanares. Qual é o volume do paralelepípedo gerado pelos mesmos? (*Não se esqueça de justificar a sua resposta.*)

b) (1,0 ponto). Seja $\vec{v}$ um vetor não nulo no espaço e α, β, γ os ângulos que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, respectivamente. Mostre que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

3. a) (1,5 pontos). Calcule os cossenos (ou senos) dos ângulos internos e a área do triângulo com vértices nos pontos $A = (1, 2, -1), B = (2, 1, 0)$ e $C = (2, 3, -1)$.

b) (1,0 ponto). Mostre que a distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ a uma reta $r: \ ax + by + c = 0$, no plano xy, é dada pela fórmula

$$\text{dist}(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

4. a) (1,5 pontos). Determine a posição relativa dos planos

$$x - 2y + 3z = 2, \quad 3x + y - 2z = 1, \quad 5x - 3y + 4z = 4\,.$$

b) (1,0 ponto). O ângulo entre uma reta r com vetor diretor $\vec{v}$ e um plano Π com vetor normal N é definido como sendo o complementar do ângulo entre uma reta perpendicular ao plano e à reta r. Denotando por $\mathrm{sen}(r, \Pi)$ o seno do ângulo entre r e Π, mostre que $\mathrm{sen}(r, \Pi) = \frac{|N \cdot \vec{v}|}{\|N\|\,\|\vec{v}\|}$. Usando esta fórmula e a fórmula da distância de um ponto a um plano, e supondo que a reta r intercepta o plano Π, conclua que $\mathrm{dist}(P, \Pi) = \|\vec{PP_1}\|\,\mathrm{sen}(r, \Pi)$, para qualquer ponto P em r, onde P_1 é o ponto de interseção de r e Π.
Sugestão: *Tome* $\vec{v} = \vec{PP_1}$.
Lembrete: ângulos complementares são aqueles cuja soma é igual a $90°$.

5. a) (1,5 pontos). Mostre que a equação da hipérbole com focos em $F_1 = (0, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$ e satisfazendo $|\mathrm{dist}(P, F_1) - \mathrm{dist}(P, F_2)| = 2$ é dada por

$$(x - 2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1\,.$$

b) (1,0 ponto). Sejam r uma reta e F um ponto, num plano Π, com $\mathrm{dist}(F, r) = 1$. Mostre que a equação $\mathrm{dist}(P, F) = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(P, r)$, $P \in \Pi$, descreve uma elipse. *Sugestão*: *Considere um sistema de coordenadas cartesianas* xy *em que o eixo* x *contém o ponto* F *e é perpendicular à reta* r *e o eixo* y *é tal que* $F = (\frac{1}{3}, 0)$ *e a reta* r *é dada por* $x = \frac{4}{3}$.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!

Gabarito

Questão1. **a)** *Determine, se existir, os valores de x para que o vetor $\vec{u} = x\vec{i}+\vec{k}$ seja paralelo ao produto vetorial de $\vec{v} = \vec{i}+x\vec{j}-2\vec{k}$ por $\vec{w} = \vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.*

Calculando o produto vetorial $\begin{array}{r} \vec{v} = \vec{i} + x\vec{j} - 2\vec{k} \\ \times\ \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \end{array}$:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \left(\begin{vmatrix} x & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2x+2,\ 0,\ 1-x) \quad = \quad 2(1-x)\vec{i} + (1-x)\vec{k}\,. \end{aligned}$$

0,5 pontos até aqui.

Logo, $\vec{u} = x\vec{i} + \vec{k}$ é paralelo a $\vec{v} \times \vec{w}$ se

$$x\vec{i} + \vec{k} = \alpha[\,2(1-x)\vec{i} + (1-x)\vec{k}\,]$$

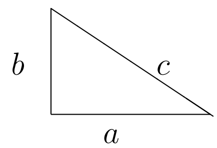
para algum escalar α ($\alpha \in \mathbb{R}$) + **0,5 pontos** até aqui.
i.e.

$$\begin{cases} x = 2\alpha(1-x) \\ 1 = \alpha(1-x)\,. \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos $x = 2$.
+ **0,5 pontos**

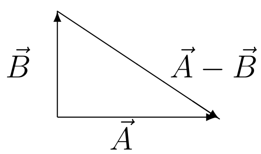
1.b) *Usando vetores, prove o Teorema de Pitágoras*:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Em termos de vetores, temos:

$$\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 = \|\vec{A} - \vec{B}\|^2$$



0,5 pontos

Para provar esta fórmula, desenvolvemos o lado direito usando o produto escalar, propriedades de operaçẽs com vetores e o fato de que os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são ortogonais ($\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$):

$$\begin{aligned} \|\vec{A} - \vec{B}\|^2 &= (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) \\ &= \vec{A} \cdot \vec{A} - 2\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2\,. \end{aligned}$$

+ 0,5 pontos

Questão 2. a) *Mostre (usando resultado(s)/teorema(s) visto(s) em aula) que os vetores* $\vec{u} = (1,3,2)$*,* $\vec{v} = (2,1,-1)$ *e* $\vec{w} = (1,-2,1)$ *não são coplanares. Qual é o volume do paralelepípedo gerado pelos mesmos?*

Pelo que aprendemos em aula, para mostrarmos que os vetores não são coplanares, basta verificarmos que o produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ não é nulo (resultado no livro-texto). Também vimos que este produto é igual ao determinante da matriz tendo como linhas linhas as respectivas coordenadas destes vetores (idem). Assim, calculamos (desenvolvendo o determinante pela primeira linha)

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

0,8 pontos até aqui.

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= (1-2) - 3(2+1) + 2(-4-1) = -1 - 6 - 10 = -17.$$

Como este produto misto não é nulo, concluimos que os vetores não são coplanares. **+ 0,2 pontos**

Vimos ainda (em aula/resultado do livro-texto) que o módulo do produto misto é o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores. Então o volume perguntado é 17 (unidades de volume). **+ 0,5 pontos**

2.b) *Seja* $\vec{v}$ *um vetor não nulo no espaço e* α*,* β*,* γ *os ângulos que* $\vec{v}$ *forma com os vetores* $\vec{i}$*,* $\vec{j}$*,* $\vec{k}$*, respectivamente. Mostre que*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Denotando as coordenadas (componentes) de $\vec{v}$ por v_1, v_2, v_3, temos $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e $v_1 = \vec{v} \cdot \vec{i} = \|\vec{v}\|\|\vec{i}\| \cos\alpha = \|\vec{v}\| \cos\alpha$, $v_2 = \vec{v} \cdot \vec{j} = \|\vec{v}\|\|\vec{j}\| \cos\beta = \|\vec{v}\| \cos\beta$, $v_3 = \vec{v} \cdot \vec{k} = \|\vec{v}\|\|\vec{k}\| \cos\gamma = \|\vec{v}\| \cos\gamma$.

0,5 pontos

Daí e de $\|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, obtemos
$\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \cos^2\alpha + \|\vec{v}\|^2 \cos^2\beta + \|\vec{v}\|^2 \cos^2\gamma = \|\vec{v}\|^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$,
logo, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, já que $\vec{v}$ é não nulo.

+ 0,5 pontos

Questão 3. a) *Calcule os cossenos (ou senos) dos ângulos internos e a área do triângulo com vértices nos pontos* $A = (1,2,-1), B = (2,1,0)$ *e* $C = (2,3,-1)$*.*

Os lados do triângulo podem ser identificados com os vetores

$$\vec{AB} = B - A = (1, -1, 1), \quad \vec{AC} = C - A = (1, 1, 0),$$
$$\vec{BC} = B - C = (0, 2, -1),$$

0,2 pontos até aqui.

logo, os cossenos dos ângulos internos são

$$\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|} = \frac{1 - 1 + 0}{\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|} = 0, \qquad \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\|\|\vec{BC}\|} = \frac{0 + 2 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{15}},$$
$$\frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CA}\|\|\vec{CB}\|} = \frac{0 + 2 + 0}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

\+ **0,5**

A área do triângulo é metade da área do parelogramo determinado pelos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ (ou $\vec{BC}$ e $\vec{BA}$=-$\vec{AB}$ ou $\vec{CA}$ e $\vec{CB}$). + **0,2**

A área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ é dado pela norma do produto vetorial $\vec{AB} \times \vec{AC}$ + **0,3**

que é igual a $\|\vec{AB}\|\,\|\vec{AC}\|\text{sen}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \sqrt{3}\sqrt{2}\,1 = \sqrt{6}$, onde usamos que $\text{sen}(\vec{AB}, \vec{AC}) = 1$, já que, como calculado acima, $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 0$.

\+ **0,3**

3.b) (1,0 ponto). *Mostre que a distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ a uma reta $r: \; ax + by + c = 0$, no plano xy, é dada pela fórmula*

$$dist(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Consideremos o espaço xyz. Então $P_0 = (x_0, y_0, 0)$, $P_1 = (0, -c/b, 0)$ é um ponto da reta e $\vec{v} = (-b, a, 0)$ é um vetor diretor da reta. Para o ponto P_1, estamos supondo que $b \neq 0$. Como temos uma reta, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$; se $a \neq 0$, podemos tomar $P_1 = (-c/a, 0, 0)$ e o racicínio que se segue vale de forma análoga. **0,3 pontos**

Pela fórmula da distância de um ponto a uma reta, temos

$$\begin{aligned} \text{dist}(P_0, r) &= \frac{\|\vec{P_1P_0} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} \qquad + \textbf{0,3 pontos} \\ &= \frac{\|(x_0 + c/a, y_0, 0) \times (-b, a, 0)\|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\|(0, 0,\ a(x_0 + c/a) + by_0)\|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

+ 0,4 pontos

Questão 4. **a)** *Determine a posição relativa dos planos*

$$x - 2y + 3z = 2, \quad 3x + y - 2z = 1, \quad 5x - 3y + 4z = 4\,.$$

Os vetores $N_1 = (1, -2, 3)$, $N_2 = (3, 1, -2)$, $N_3 = (5, -3, 4)$ são normais aos planos, respectivamente. É fácil ver que nenhum par destes são paralelos, logo, não há dois planos paralelos. **0,5 pontos**
Vejamos se estes vetores são coplanares:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= (4-6) + 2(12+10) + 3(-9-5) = -2 + 44 - 42 = 0\,;$$

como o determinante acima é nulo, concluimos que os tres vetores normais são coplanares, logo, a posição relativa dos planos é tal que a interseção dos mesmos é um conjunto vazio (os planos se interceptam dois a dois em retas distintas) ou uma reta (os três planos se interceptam segundo uma reta).
+ 0,5 pontos
Para decidir sobre estas duas alternativas, resolvemos o sistema de equações lineares, dados pelas equações dos planos:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 2 \\ 3x + y - 2z &= 1 \\ 5x - 3y + 4z &= 4\,. \end{cases}$$

Fazendo operações elementares sobre a matriz aumentada do sistema (as contas devem constar na prova) chegamos ao sistema equivalente

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 2 \\ 0x + 7y - 11z &= -5 \\ 0x + 0y + 0z &= 1\,, \end{cases}$$

o qual não tem solução. Portanto, a posição relativa dos três planos é que eles se interceptam dois a dois segundos três retas distintas. **+ 0,5 pontos**

b) *O ângulo entre uma reta r com vetor diretor $\vec{v}$ e um plano Π com vetor normal N é definido como sendo o complementar do ângulo entre uma reta perpendicular ao plano e à reta r. Denotando por $sen(r, \Pi)$ o seno do ângulo entre r e Π, mostre que* $sen(r, \Pi) = \frac{|N \cdot \vec{v}|}{\|N\|\,\|\vec{v}\|}$. *Usando esta fórmula* *e a fórmula da distância de um ponto a um plano, e supondo que a reta* r *intercepta o plano* Π*, conclua que* $dist(P,\Pi) = \|\vec{PP_1}\|\, sen(r,\Pi)$*, para qualquer ponto* P *em* r*, onde* P_1 *é o ponto de interseção de* r *e* Π*.*

O cosseno $\cos r_1, r_2$ entre duas retas r_1, r_2 é dado pela fórmula $\cos r_1, r_2 = \frac{|\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}|}{\|\vec{v_1}\|\,\|\vec{v_2}\|}$, em que $\vec{v_1}\ \vec{v_2}$ são vetores diretores das (paralelos às) retas, respectivamente. Então, tomando $\vec{v_1} = \vec{v}$ e $\vec{v_2} = N$, obtemos que

$$\frac{|\vec{v}\cdot\vec{N}|}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{N}\|}$$

é o cosseno do ângulo pedido. Como este é complementar, segue-se a fórmula $\mathrm{sen}(r,\Pi) = \frac{|N\cdot\vec{v}|}{\|N\|\,\|\vec{v}\|}$ (pois $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \Rightarrow \cos\theta_1 = \mathrm{sen}\theta_2$). **0,5 pontos**

Para a segunda parte, tomando nesta fórmula $\vec{v} = \vec{PP_1}$ (um vetor paralelo à reta r, já que $P, P_1 \in r$) obtemos

$$\mathrm{sen}(r,\Pi) = \frac{|\vec{PP_1}\cdot\vec{N}|}{\|\vec{PP_1}\|\,\|\vec{N}\|}.$$

Daí, como $\mathrm{dist}(P,\Pi) = \frac{|\vec{PP_1}\cdot\vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$ (fórmula da distância de um ponto a um plano) vem a fórmula pedida, $\mathrm{dist}(P,\Pi) = \|\vec{PP_1}\|\,\mathrm{sen}(r,\Pi)$.

+0,5 pontos

Questão 5. a) *Mostre que a equação da hipérbole com focos em* $F_1 = (0,0)$ *e* $F_2 = (4,0)$ *e satisfazendo* $|dist(P,F_1) - dist(P,F_2)| = 2$ *é dada por*

$$(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1\,.$$

Escrevendo $P = (x, y)$ e desenvolvendo a equação dada, temos:

$$\begin{aligned}
\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2) &= \pm 2 \\
\text{dist}(P, F_1) &= \pm 2 + \text{dist}(P, F_2) \\
\|P - F_1\| &= \pm 2 + \|P - F_2\| \\
\|P - F_1\|^2 &= (\pm 2 + \|P - F_2\|)^2
\end{aligned}$$

0,5 pontos

$$\begin{aligned}
&= 4 \pm 4\|P - F_2\| + \|P - F_2\|^2 \\
x^2 + y^2 &= 4 \pm 4\|P - F_2\| + (x-4)^2 + y^2 \\
x^2 &= 4 \pm 4\|P - F_2\| + x^2 - 8x + 16 \\
8x - 20 &= \pm 4\|P - F_2\| \\
2x - 5 &= \pm\|P - F_2\|
\end{aligned}$$

+ 0,5 pontos

$$\begin{aligned}
(2x-5)^2 &= (\|P - F_2\|)^2 = (x-4)^2 + y^2 \\
4x^2 - 20x + 25 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 \\
3x^2 - 12x + 9 &= y^2 \\
y^2 &= 3(x^2 - 4x + 3) \\
&= 3[(x-2)^2 - 1] \\
(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} &= 1\,.
\end{aligned}$$

+ 0,5 pontos

b) *Sejam r uma reta e F um ponto, num plano Π, com dist$(F, r) = 1$. Mostre que a equação dist$(P, F) = \frac{1}{2}$dist(P, r), $P \in \Pi$, descreve uma elipse.* Sugestão*:* Considere um sistema de coordenadas cartesianas xy em que o eixo x contém o ponto F e é perpendicular à reta r e o eixo y é tal que $F = (\frac{1}{3}, 0)$ e a reta r é dada por $x = \frac{4}{3}$.

Tomando o sistema de coordenadas xy sugerido, escrevendo $P = (x, y)$ e desenvolvendo a equação dada, temos:

$$\begin{aligned}
\text{dist}(P, F) &= \tfrac{1}{2}\text{dist}(P, r) \\
\|P - F\| &= \tfrac{1}{2}\text{dist}(P, r) \\
\|(x, y) - (1/3, 0)\| &= \tfrac{1}{2}\|(x, y) - (4/3, y)\|
\end{aligned}$$

0,5 pontos

$$\begin{aligned}
\|(x, y) - (1/3, 0)\|^2 &= (\tfrac{1}{2}\|(x, y) - (4/3, y)\|)^2 \\
(x - \tfrac{1}{3})^2 + y^2 &= \tfrac{1}{4}(x - \tfrac{4}{3})^2 \\
x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{9} + y^2 &= \tfrac{1}{4}(x^2 - \tfrac{8}{3}x + \tfrac{16}{9}) \\
\tfrac{3}{4}x^2 + y^2 &= \tfrac{3}{9} = \tfrac{1}{3} \\
\tfrac{9}{4}x^2 + 3y^2 &= 1 \\
\frac{x^2}{4/9} + \frac{y^2}{1/3} &= 1 \quad \text{(equação de uma elipse).}
\end{aligned}$$

+ 0,5 pontos