DM–IMECC–UNICAMP, MA720/Análise no $\mathbb{R}^n$, Prof. Marcelo M. Santos,
2a. prova, 09/10/2013
Aluno: ___________________________________ RA: ___________
Assinatura como no RG: ______________________________

Justifique (de forma sucinta) todas as suas afirmações.

Questão 1. a) (0,5 pontos) Defina aplicação diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e a aplicação derivada $f'(a)$, $a \in U$.

b) (1,5) Seja $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear. Mostre que

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f(h,b) + f(a,k) + f(h,h),$$

para quaisquer $(a,b), (h,k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, e, **usando esta relação**, mostre que f é diferenciável, em todo ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Exiba $f'((a,b))$ e a matriz jacobiana $(Jf)((a,b))$.

2. Dados $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ e $p, q \in \mathbb{R}$ positivos tais que $1/p + 1/q = 1$, sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad g(x,y) = xy.$$

a) (1,5) Sejam $c > 0$ (uma constante positiva arbitrária) e (x_c, y_c) o ponto de mínimo da função f restrita à hiperfície (curva) definida pela equação $g(x,y) = c$. **Usando multiplicadores de Lagrange**, mostre que $x_c^p = y_c^q$.

b) (0,5) **Usando o item a)**, mostre que $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}, \quad \forall\, x, y \geq 0.$

Dica: $f(x_c, y_c) = c$.

3. Seja $f(x,y) = (x^3 + 2xy + y^2, x^2 + y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) (1,0) Mostre que f é invertível numa vizinhança do ponto $(1,1)$.

b) (1,0) Determine a função afim que melhor aproxima a inversa de f numa vizinhança do ponto $f(1,1)$.

4. a) (1,0) Enuncie o Teorema da Função Implícita.

b) (2,0) Demonstre o Teorema da Função Implícita usando o Teorema da Aplicação Inversa.

5. (1,0) Sejam $A : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funções continuamente diferenciáveis (de classe C^1). Suponhamos que $\det A(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. **Use o Teorema da Aplicação Implícita**, para mostrar que a solução s do sistema linear $As = b$ $(A(t)s(t) = b(t),\ t \in \mathbb{R})$ é uma aplicação (um caminho) diferenciável.

Boa prova!