MA720/MM720 – Análise no $\mathbb{R}^n$, 1s2014
2a. prova, 20/05/2014

Questão 1. a) (0,5 pontos) Enuncie o Teorema do Posto.

b) (1,0) Sejam U um aberto do $\mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação aberta de classe C^1 e B_r o conjunto dos pontos (em U) em que o posto de f é r. Mostre que $\text{int}.B_r = \emptyset$ se r não for máximo, i.e. se $r < n$.

c) (1,0) Sem usar a Proposição 10.3 do livro-texto [Lima, Elon L., *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$], a não ser que você a demonstre, mostre que B_n é aberto e denso em U. (*Sugestão para mostrar a densidade*: mostre que qualquer aberto contido em U intercepta B_n.)

2. (2,5) Sejam S um subconjunto denso do retângulo $Q = [0,1]^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que cada reta vertical ou horizontal contém no máximo um ponto de S (*Não precisa mostrar a existência desse conjunto.*) e $f : Q \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = 1_S(x,y)$ se $y \geq x$ e $f(x,y) = 1 - 1_S(x,y)$ se $y < x$. Calcule as integrais $\overline{\int}_Q f$, $\underline{\int}_Q f$, $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy$ e $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx$. Vale o "Teorema de Fubini" para integrais superiores:

$$\overline{\int}_Q f = \overline{\int}_0^1 \overline{\int}_0^1 f(x,y)dxdy?$$

3. (2,5) Seja f uma função limitada em um retângulo Q em $\mathbb{R}^n$. Demonstre a seguinte parte do "Teorema de Lebesgue": *Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida nula então f é integrável.*

4. Sejam $B = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$ (a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro na origem e raio 1) e $j \in \{1, \cdots, n\}$.

a) (1,0) Mostre que $\int_B x_j dx = 0$.

b) (1,5) Calcule $\int_B x_j^2 dx$, em função de $v(B)$.

Boa prova!

GABARITO

Questão 1. a) (0,5 pontos) *Enunciе o Teorema do Posto.*

Enunciado parcialmente correto: **0,25 pontos**
Enunciado correto: **0,5 pontos**.

b) (1,0) *Sejam U um aberto do $\mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação aberta de classe C^1 e B_r o conjunto dos pontos (em U) em que o posto de f é r. Mostre que int.$B_r = \emptyset$ se r não for máximo, i.e. se $r < n$.*

Suponhamos que exista um ponto $a \in$ int.B_r para $r < n$. Então $r \leq m$ e, sendo a um ponto interior, existe um aberto V em que o posto de f é r em qualquer de seus pontos. $\mathbf{0,1}$
Então, pelo Teorema do Posto, localmente em V, temos difeomorfismos α, entre abertos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$, e β, entre abertos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ (α é uma restrição da aplicação identidade em $\mathbb{R}^m$ caso $r = m$) tais que $\beta \circ f \circ \alpha(x, y) = (x, 0)$ para todo (x, y) em um aberto $A = V \times Z$ em $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$. $+ \mathbf{0,4}$
Mas então $f(\alpha(A)) = \beta^{-1}(V \times \{0\})$ não é um aberto em $\mathbb{R}^n$. Portanto, se f é aberta temos que $B_r = \emptyset$ se $r < n$. $+ \mathbf{0,5}$
(Caso $r = 0$: se $Df = 0$ em alguma vizinhança temos que f é constante nessa vizinhança, logo, não é uma aplicação aberta.)

c) (1,0) *Sem usar a Proposição 10.3 do livro-texto [Lima, Elon L.,* Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$*], a não ser que você a demonstre, mostre que B_n é aberto e denso em U. (Sugestão para mostrar a densidade: mostre que qualquer aberto contido em U intercepta B_n.)*

Seja a um ponto em B_n. Então existem $i_1, \cdots, i_n$ tais que $\frac{\partial f}{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_n})}$ tem determinante diferente de zero numa vizinhança de a, pois f é de classe C^1, logo, essa vizinhança está contida em B_n. Portanto B_n é um conjunto aberto.
$\mathbf{0,5}$

Pelo item **b)**, qualquer aberto $A \subset U$ intercepta B_n, pois caso contrário teríamos $A \subset \cup_{r<n} B_r$, logo, $A = \cup_{r<n}(A \cap B_r)$, donde $A \cap B_r$ seria aberto para algum $r < n$, o que contradiz o fato de B_r ter interior vazio se $r < n$.
$+ \mathbf{0,5}$

2. (2,5) *Sejam S um subconjunto denso do retângulo $Q = [0,1]^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que cada reta vertical ou horizontal contém no máximo um ponto de S (Não precisa mostrar a existência desse conjunto.) e $f : Q \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = 1_S(x,y)$ se $y \geq x$ e $f(x,y) = 1 - 1_S(x,y)$ se $y < x$. Calcule as integrais $\overline{\int}_Q f$, $\underline{\int}_Q f$, $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy$ e $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx$. Vale o "Teorema de Fubini" para integrais superiores:*

$$\overline{\int}_Q f = \overline{\int}_0^1 \overline{\int}_0^1 f(x,y)dxdy\,?$$

Dados uma partição P de Q e R um subretângulo de P, temos $R \cap S \neq \emptyset$, pela densidade de S em Q, e $R - S \neq \emptyset$, pela propriedade de que S intercepta cada reta vertical ou horizontal em no máximo um ponto. Então $M_R(f) = 1$ e $m_R(f) = 0$, logo, qualquer soma superior $S(f,P) = 1$ e qualquer soma inferior $s(f,P) = 0$, donde $\overline{\int}_Q f = 1$ e $\underline{\int}_Q f = 0$. **1,0**

Fixado y, temos $f(x,y) = 0$ se $x \leq y$ exceto possivelmente em um ponto e $f(x,y) = 1$ se $x > y$ exceto possivelmente em um ponto, logo $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_y^1 dxdy = \int_0^1 (1-y)dy = 1/2$. **+ 0,5**

Analogamente, $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = 1/2$. **+ 0,5**

Não vale o Teorema de Fubini para integrais superiores: $\overline{\int}_Q f = 1$ e $\overline{\int}_0^1 \overline{\int}_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy$, visto que as funções aqui nesta integral são integráveis, e a mesma vale $1/2$. **+ 0,5**

3. (2,5) *Seja f uma função limitada em um retângulo Q em $\mathbb{R}^n$. Demonstre a seguinte parte do "Teorema de Lebesgue":* Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida nula então f é integrável.

Denotemos por D o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Seja $\epsilon > 0$.

Para cada ponto $x \in Q - D$, pela continuidade de f existe um retângulo R tal que $x \in \text{int}.R$ e $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ se $y \in R$, **0,5**

logo, $\quad M_R(f) - m_R(f) \leq 2\epsilon. \qquad (*)$

Juntando esses retângulos a uma outra coleção de retângulos abertos $\text{int}.R'$ cobrindo D com volume total menor do que ϵ (D tem medida nula), obtemos uma cobertura aberta de Q da qual podemos extrair uma subcobertura finita, pela compacidade de Q. **0,5**

Tomando as extremidades das arestas de Q e todas as extremidades das arestas dos subretângulos dessa subcobertura, obtemos uma partição P de Q, com subretângulos R com a propriedade $(*)$ e subretângulos R' com volume total menor do que ϵ, de forma que $S(f,P) - s(f,P) = I + II$, onde

$$I = \sum_R [M_R(f) - m_R(f)]\mathrm{vol}(R) \le 2\epsilon \sum_R \mathrm{vol}(R) \le 2\epsilon \mathrm{vol}(Q) \qquad \mathbf{0,5}$$

e

$$II = \sum_{R'} [M_{R'}(f) - m_{R'}(f)]\mathrm{vol}(R') \le 2\sup_Q |f| \sum_{R'} \mathrm{vol}(R') \le 2\sup_Q |f|\epsilon \; \mathbf{0,5}$$

Logo, existe uma partição P de Q tal que $S(f,P) - s(f,P) \le$ const.ϵ. Portanto, f é integrável. **0,5**

4. *Sejam* $B = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$ *(a bola aberta em* $\mathbb{R}^n$ *de centro na origem e raio* 1*) e* $j \in \{1, \cdots, n\}$.

a) (1,0) *Mostre que* $\int_B x_j dx = 0$.

A mudança de variáveis $g(x) = (x_1, \cdots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)$ deixa B invariante **0,3**
e $|\det Dg(x)| = |\det[\mathbf{e}_1 \cdots - \mathbf{e}_j \cdots \mathbf{e}_n]^t| = |\det(-[\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_j \cdots \mathbf{e}_n])| = |-1| = 1$. **0,3**
Então pondo $f(x) = x_j$, pelo Teorema de Mudança de Variáveis, temos

$$\int_B x_j dx = \int_B f(g(x))|\det g'| dx = \int_B (-x_j) dx = -\int_B x_j dx,$$

logo, $\int_B x_j dx = 0$. **0,4**

b) (1,5) *Calcule* $\int_B x_j^2 dx$, *em função de* $v(B)$.

A mudança de variáveis que permuta as coordenadas x_j, x_k deixa B invariante e tem determinante -1, logo, pelo Teorema de Mudaça de Variáveis, $\int_B x_j^2 dx$ independente de $j = 1, \cdots, n$. **0,75**
Daí, temos que $\int_B x_j^2 dx = \frac{1}{n}\int_B \sum_{k=1}^n x_k^2 dx = \frac{1}{n}\int_B |x|^2 dx$. **0,75**

Para calcular $\int_B |x|^2 dx$, seguimos as ideias dos exercícios 6/S.19 e 7/S.17. Sejam $\lambda_n = v(B)$ e $v(B_r^n) = r^n \lambda_n$ os volumes das bolas em $\mathbb{R}^n$ de raios 1 e r, respectivamente. Fazendo a mudança de variáveis $x = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta, z)$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
a_n \equiv\; & \int_B |x|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{B^{n-2}_{1-r^2}} (r^2 + |z|^2) r dz dr d\theta \\
= \; & 2\pi \int_0^1 \int_{B^{n-2}_{1-r^2}} r^3 dz dr + 2\pi \int_0^1 \int_{B^{n-2}_{1-r^2}} |z|^2 r dz dr \\
= \; & 2\pi \int_0^1 r^3 v(B^{n-2}_{1-r^2}) dr + 2\pi \int_0^1 \int_{B^{n-2}_1} (1-r^2)^2 |z|^2 (1-r^2)^{n-2} r dz dr \\
= \; & 2\pi \lambda_{n-2} \int_0^1 r^3 (1-r^2)^{n-2} dr + 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)^n dr \int_{B^{n-2}_1} |z|^2 dz \\
= \; & 2\pi \lambda_{n-2} \int_0^1 r(1-r^2-1)(1-r^2)^{n-2} dr + 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)^n dr \int_{B^{n-2}_1} |z|^2 dz \\
= \; & 2\pi \lambda_{n-2} \int_0^1 r(1-r^2)^{n-1} dr - 2\pi \lambda_{n-2} \int_0^1 r(1-r^2)^{n-2} dr \\
& + 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)^n dr a_{n-2} \\
= \; & \pi \lambda_{n-2} \int_0^1 s^{n-1} ds - \pi \lambda_{n-2} \int_0^1 s^{n-2} ds + \pi \int_0^1 s^n ds a_{n-2} \\
= \; & \pi \lambda_{n-2}/n - \pi \lambda_{n-2}/(n-1) + \pi a_{n-2}/(n+1) \\
= \; & (n-1)\lambda_n/n - \lambda_n + \pi a_{n-2}/(n+1) \\
= \; & \pi a_{n-2}/(n+1) - \lambda_n/n
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& a_3 = \pi a_1/4 - \lambda_3/3 = \pi \int_{-1}^1 x^2 dx/4 - v(B)/3 = \pi/6 - v(B)/3 \\
& a_4 = \pi a_2/5 - \lambda_4/4 = \pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta/5 - v(B)/4 = \pi^2/10 - v(B)/4 \\
& \vdots
\end{aligned}
$$