DM–IMECC–UNICAMP, MA502/Análise I, PROF. Marcelo M. Santos
1a. prova, 04/04/2012
Aluno: ______________________________ RA: ____________
Assinatura, como no RG: ___________________________________
Observações: *Tempo de prova: 100min; Justifique sucintamente todas as suas afirmações.*

1. Seja X o conjunto dos números naturais n tais que existe uma bijeção de um subconjunto próprio de I_n e I_n. ($I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.) Sabemos que X é um conjunto vazio (Teorema), mas sem admitir este fato,

a) **(0,5 pontos)** mostre que $1 \in X$;

b) **(1,5)** mostre que se n é um elemento de X então $n-1$ também é um elemento de X;

c) **(0,5)** conclua que X é vazio.

2. a) (1,0) Seja K um corpo ordenado. Mostre que todo subconjunto de K limitado superiormente tem um supremo (uma menor cota superior) se, e somente se, todo subconjunto de K limitado inferiormente tem um ínfimo (uma maior cota inferior).

b) (1,0) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Mostre que $-X := \{-x\,;\, x \in X\}$ é limitado superiormente e $\inf X = -\sup(-X)$.

3. (2,0) Seja (x_n) a sequência definida por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1/(1 + x_n) + 1$. Mostre que (x_n) tem uma subsequência convergente para $\sqrt{2}$.
(*Dica*: $0 < x_n < 2$.)

4. (2,0) Mostre que a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$ é divergente e que a série alternada $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ é convergente. Conclua que a série alternada $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ é condicionalmente convergente (i.e. pondo $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, temos $\sum a_n$ convergente, mas $\sum |a_n| = \infty$).

5. (2,0) Usando o Teorema dos Intervalos Encaixados, mostre que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Não esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!

Gabarito

Questão 1 (Sobre o Teorema: *Não existe uma bijeção de um subconjunto próprio de I_n (ou de um conjunto finito) nele mesmo.*)

Seja X o conjunto dos números naturais n tais que existe uma bijeção de um subconjunto próprio de I_n e I_n. ($I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.) Sabemos que X é um conjunto vazio (Teorema), mas sem admitir este fato,

a) **(0,5 pontos)** *mostre que* $1 \notin X$;

Seja A um subconjunto próprio de I_1. Como $I_1 = \{1\}$, temos que $A = \emptyset$, logo, não existe uma bijeção $f : A \to I_1$. (Caso existisse teríamos $1 = f(a)$ para algum $a \in A$, mas isto não pode acontecer haja vista que $A = \emptyset$.) Portanto $1 \notin X$, pois, pela defiņção de X, se 1 pertencesse a X deveria existir uma bijeção de um subconjunto próprio de I_1 e I_1.

b) **(1,5)** *mostre que se n é um elemento de X então $n-1$ também é um elemento de X*;

Seja n um elemento de X. Como, pelo item a), $1 \notin X$, temos que $n \geq 2$.

(+ **0,1 pontos** até aqui)

Então, pela definição de X, existem um subconjunto próprio A de I_n e uma bijeção $f : A \to I_n$. Para mostrar que $n - 1$ também é um elemento de X, considera-se os dois casos:

Caso 1: $n \in A$. Neste caso, existe também uma bijeção $g : A \in I_n$ tal que $g(n) = n$; v. Lema. Daí, a restrição $g|A - \{n\} \to I_n - \{n\} = I_{n-1}$ também é uma bijeção. Logo, $n - 1 \in X$, já que $A \subsetneq I_n$, $n \in A \Rightarrow A - \{n\} \subsetneq I_{n-1}$.

(+ **0,7 pontos**)

Caso 2: $n \notin A$. Neste caso, tomando-se $a \in A$ tal que $f(a) = n$ (existe este elemento a em A tendo em vista que $f : A \to I_n$ é uma bijeção - em particular, uma função sobrejetiva) a restrição $g|A - \{a\} \to I_n - \{n\} = I_{n-1}$ também é uma bijeção.

(+ **0,5**)

Além disso, como $n \notin A$ temos que $a \neq n$, logo $A - \{a\}$ é um subconjunto próprio de I_{n-1}. Então $n - 1 \in X$.

(+ **0,2**)

c) **(0,5)** *conclua que X é vazio.*

Pelo item b), X não tem um menor elemento. (**0,2**)

Como todo subconjunto dos números naturais diferente do vazio tem um menor elemento (v. Teorema), concluimos que $X = \emptyset$. (+ **0,3**)

Questão 2 (Sobre corpo ordenado completo.)

a) (1,0) *Seja K um corpo ordenado. Mostre que todo subconjunto de K limitado superiormente tem um supremo (uma menor cota superior) se, e somente se, todo subconjunto de K limitado inferiormente tem um ínfimo (uma maior cota inferior).*

Suponhamos que todo subconjunto de K limitado superiormente tenha um supremo. Seja A um subconjunto qualquer de K limitado inferiormente. Dada uma cota inferior c de A temos que $-c$ é uma cota superior de $-A := \{-x; x \in A\}$. Com efeito, $x \in A \Rightarrow x \geq c \Rightarrow -x \leq -c$. Então $-A$ é limitado superiormente. **(0,2)**
Daí e da hipótese (de que todo subconjunto de K limitado superiormente tem um supremo) existe $s = \sup(-A)$. Vejamos que $-s = \inf A$. (+ **0,1**)
Como $s = \sup(-A)$, temos que, em particular, s é uma cota superior de $-A$, logo $-s$ é uma cota inferior de A. Com efeito, $x \in A \Rightarrow -x \in -A \Rightarrow -x \leq s \Rightarrow x \geq -s$. Logo, $-s$ é uma cota inferior de A. (+ **0,2**)
Além disso, se $c > -s$ então $-c < s$, logo, pela definição de supremo e por ser $s = \sup(-A)$, existe $y \in -A$ tal que $-c < y \leq s$. Mas $y \in -A$ implica em $y = -x$ para algum $x \in A$, logo existe $x \in A$ tal que $-c < -x \leq s$, donde vem que $-s \leq x < c$ e $x \in A$. Então $-s$ é a maior cota inferior de A, ou seja, o ínfimo de A. (+ **0,2**)

Analogamente, mostra-se a recíproca. Suponhamos que todo subconjunto de K limitado inferiormente tenha um ínfimo. Seja A um subconjunto qualquer de K limitado superiormente. Se c é uma cota superior de A então $-c$ é uma cota inferior de $-A$ ($x \in A \Rightarrow x \leq c \Rightarrow -x \geq -c$). Então $-A$ é limitado inferiormente. Seja $s = \inf(-A)$. Vejamos que $-s = \sup A$. $x \in A \Rightarrow -x \in -A \Rightarrow -x \geq s \Rightarrow x \leq -s$. Logo, $-s$ é uma cota superior de A. Além disso, se $c < -s$ então $s < -c$, logo, pela definição de ínfimo e por ser $s = \inf(-A)$, existe $x \in A$ tal que $s \leq -x < -c$, donde que $c < x \leq -s$. Então $-s$ é a menor cota superior de A, ou seja, o supremo de A. (+ **0,3**)

b) (1,0) *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Mostre que $-X := \{-x\,;\, x \in X\}$ é limitado superiormente* e $\inf X = -\sup(-X)$.

(Feito no item a).) Dada uma cota inferior c de X temos que $-c$ é uma cota superior de $-X$. Com efeito, $x \in X \Rightarrow x \geq c \Rightarrow -x \leq -c$.
Então $-X$ é limitado superiormente. **(0,3)**
Seja $s = \inf X$. Vejamos que $-s = \sup(-X)$, i.e. $s = \inf X = -\sup(-X)$.
Como $s = \inf X$, temos que, em particular, s é uma cota inferior de X, logo,

como vimos acima, $-s$ é uma cota superior de $-X$. (+ **0,2**)
Além disso, se $c < -s$ então $s < -c$, logo, pela definição de ínfimo e por ser $s = \inf X$, existe $x \in X$ tal que $s \leq x < -c$, ou seja, $c < -x \leq -s$. Como $-x \in -X$, segue que $-s$ é a menor cota superior de $-X$, ou seja, o supremo de $-X$. (+ **0,5**)

Questão 3 (2,0). *Seja (x_n) a sequência definida por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1/(1+x_n)+1$. Mostre que (x_n) tem uma subsequência convergente para $\sqrt{2}$. (*Dica*: $0 < x_n < 2$.)*

Provemos por indução que $0 < x_n < 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
Seja $X = \{n \in \mathbb{N}; 0 < x_n < 2\}$. Como $x_1 = 1$, temos que $1 \in X$.
$(\mathbf{0,2})$
Suponhamos que $n \in X$ ('hipótese da indução'), ou seja, $0 < x_n < 2$. De $x_n > 0$, temos que $1 + x_n > 0$, visto que $1 > 0$, logo, também $1/(1+x_n) = (1+x_n)^{-1} > 0$ e $x_{n+1} = 1/(1+x_n)+1 > 0$. Além disso, $1 + x_n > 1$, pois $x_n > 0$, então $1/(1+x_n) < 1$ e $x_{n+1} = 1/(1+x_n)+1 < 1+1 = 2$. Logo, $n+1 \in X$. (+ **0,5**)
Portanto, pelo Princípio da Indução ('3o. axioma' de Peano), concluimos que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $0 < x_n < 2$ para todo n. (+ **0,1**)

Sendo $0 < x_n < 2$ para todo n, temos que (x_n) é uma sequência limitada, logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, tem uma subsequência (x_{n_k}) convergente. $(+\ \mathbf{0,6})$
Sela $l = \lim x_{n_k}$. Daí e da definição de x_n, temos $x_{n_k+1} = 1/(1+x_{n_k})+1$, $l = \lim x_{n_k+1} = \lim (1/(1+x_{n_k})+1) = 1/(1+\lim x_{n_k})+1 = 1(1+l)+1$, logo, $l-1 = 1/(1+l)$, $(l-1)(1+l) = 1$, $l^2-1 = 1$, $l^2 = 2$, ou seja, $l = \sqrt{2}$. ($l > 0$, pois na verdade $x_n \geq 1$ para todo n, logo, $l = \lim x_{n_k} \geq 1$.) (+ **0,6**)

Questão 4 (2,0) *Mostre que a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$ é divergente e que a série alternada $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ é convergente. Conclua que a série alternada $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ é condicionalmente convergente (i.e. pondo $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, temos $\sum a_n$ convergente, mas $\sum |a_n| = \infty$).*

Seja s_n a soma parcial de ordem n da série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Tomando a diferença entre s_{2n} e s_n, temos:

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \tfrac{1}{n+1} + \cdots + \tfrac{1}{2n} \\ &\geq \tfrac{1}{2n} + \cdots + \tfrac{1}{2n} \\ &= \tfrac{2n}{2n} = \tfrac{1}{2}, \end{aligned} \qquad \textbf{(0,5)}$$

logo não pode existir o limite $\lim s_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, pois caso existisse teríamos $\lim s_{2n} - \lim s_n \geq \frac{1}{2}$ (+ **0,2**)
já que (s_{2n}) é uma subsequência de (s_n) (+ **0,2**)
e então, $0 \geq 1/2$. (+ **0,1**)

A série alternada $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ é convergente pelo Teste da Série Alternada (Teorema de Leibniz). (+ **0,2**)
Com efeito, pondo $a_n = 1/n$, temos $a_{n+1} = 1/(n+1) < 1/n = a_n$ (a sequência é monótona decrescente) (+ **0,3**)
e $\lim a_n = \lim 1/n = 0$ ($\inf\{1/n; n \in \mathbb{N}\} = 0$; v. Teorema), (+ **0,3**)
ou seja, as hipóteses do Teorema de Leibniz se verificam para a série $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$.

Como $\sum |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum \frac{1}{n}$ e esta última é uma série divergente, concluimos que a série alternada é condicionalmente convergente, ou seja $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ é convergente mas $\sum |(-1)^n \frac{1}{n}|$ é divergente. (+ **0,2**)

Questão 5 (2,0) (Teorema) *Usando o Teorema dos Intervalos Encaixados, mostre que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável.*

(V. a demonstração no livro-texto:) Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Vejamos que f não pode ser sobrejetiva (logo, $\mathbb{R}$ não é enumerável, haja vista a definição de conjunto enumerável e que f é arbitrária). (**0,2**)
Tomemos um intervalo qualquer $[a_1, b_1]$ tal que $f(1) \notin [a_1, b_1]$, em seguida um intervalo $[a_2, b_2]$ tal que $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$ e $f(2) \notin [a_2, b_2]$ e, assim por diante: (+ **0,5**)
dado $[a_n, b_n]$ tal que $f(n) \notin [a_n, b_n]$, tomamos $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ tal que $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ e $f(n+1) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$. (+ **0,2**)
Como $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ (para todo n), pelo Teorema dos Intervalos Encaixados concluimos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. (+ $\mathbf{0,6}$)
Temos que $c \neq f(n)$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, (+ **0,2**)
pois $f(n) \notin [a_n, b_n]$, logo f não é sobrejetiva. (+ **0,3**)