DM–IMECC–UNICAMP
Análise I
PROF. Marcelo M. Santos
1a. prova, 08/04/2009

Aluno: ____________________________ RA: ___________
Assinatura: _________________________________

Observações: *Tempo de prova: 100min;*
Justifique sucintamente todas as suas afirmações.;
Cada questão vale 2,5 pontos.

1. Enuncie precisamente o *princípio da indução* (terceiro axioma de Peano) e usando-o prove:

(a) $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2.$

(b) $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$

2. Enuncie o Teorema dos Intervalos Encaixados e usando-o prove que o conjunto dos número reais não é enumerável.

3. Dê exemplo de uma sequência cujo conjunto dos seus valores de aderência seja $\mathbb{N}$.

4. Determine se a série

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{2^3} + \cdots$$

é convergente ou divergente.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!

Gabarito

Questão 1. *Princípio da Indução.* Seja $X \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in \mathbb{N}$ e $n+1 \in X$ (o sucessor de n pertence a X) sempre que $n \in X$. Então $X = \mathbb{N}$.

(**0,5 pontos** até aqui.)

(a) ($X = \{n \in \mathbb{N}\,;$ a fórmula vale para $n\}$.) A fórmula vale para $n = 1$ ($1 \in X$), pois $1 = 1(1+1)/2$. (+ **0,3 pontos** até aqui)

Suponhamos que a fórmula vale para $n \in \mathbb{N}$ (Hipótese da Indução: $n \in X$). Vejamos que isto implica em que ela também vale para $n+1$ (o sucessor de n) (Tese da Indução): Escrevendo $1+2+\cdots+(n+1) = (1+2+\cdots+n)+(n+1)$ e usando a Hipótese da Indução, temos

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}, \end{aligned}$$

logo, a fórmula vale para $n+1$. (+ **0,7 pontos**)

(b) $n = 1$:

$$1 = 1^2.$$

Hipótese da Indução:

$$1+3+5+\cdots+2n-1 = n^2.$$

Tese da Indução:

$$\begin{aligned} & 1+3+5+\cdots+(2(n+1)-1) \\ = & (1+3+5+\cdots+2n-1)+(2(n+1)-1) \\ = & n^2+(2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

(+ **1,0 ponto**)

Questão 2. *Teorema dos Intervalos Encaixados.* Sejam os intervalos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\cdots$ satisfazendo $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$. Então $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset$. (**0,5 pontos** até aqui.)

<u>Prova de que $\mathbb{R}$ não é enumerável (veja o Teorema no livro-texto)</u>: Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Vejamos que f não pode ser sobrejetiva (logo, $\mathbb{R}$ não é enumerável, haja vista a definição de conjunto enumerável e que f é arbitrária): Tomemos um intervalo qualquer $[a_1, b_1]$ tal que $f(1) \notin$

$[a_1, b_1]$, em seguida um intervalo $[a_2, b_2]$ tal que $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$ e $f(2) \notin [a_2, b_2]$ e, assim por diante: dado $[a_n, b_n]$ tal que $f(n) \notin [a_n, b_n]$, tomamos $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ tal que $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ e $f(n+1) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Como $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ (para todo n), pelo Teorema dos Intervalos Encaixados concluimos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Temos que $c \neq f(n)$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, pois $f(n) \notin [a_n, b_n]$, logo f não é sobrejetiva.

(+ **2,0 pontos**.)

Questão 3. Escreva $\mathbb{N}$ como uma união disjunta de subconjuntos infinitos, e.g. denotando os números primos por $p_2, p_3, p_4, \cdots$, temos $\mathbb{N} = \cup_{k=1}^{\infty} N_k$ para $N_k = \{p_k^j\ ,\ j = 1, 2, \cdots\}$, $k = 1, 2, \cdots$, e $N_1 = \mathbb{N}/\cup_{k=2}^{\infty} N_k$.

($\mathbf{\frac{2,5}{3}}$ **pontos** até aqui.)

Agora, seja (x_n) a sequência dada por $x_n = k$ quando $n \in N_k$.

(+ $\mathbf{\frac{2,5}{3}}$ **pontos** até aqui.)

Dado $k \in \mathbb{N}$, qualquer, temos $x_n = k$ para uma quantidade infinita infinita de índices, a saber, para todo $n \in N_k$, logo k é o limite da subsequência constante $(x_n)_{n\in N_k}$, e portanto um valor de aderência da sequência (x_n).

(+ $\mathbf{\frac{2,5}{3}}$ **pontos**.)

Questão 4. A série é absolutamente convergente pelo Teste de Cauchy. Com efeito, tomando índices ímpares na raiz $\sqrt[n]{|a_n|}$ (onde a_n denota o termo geral da série em questão) obtemos a subsequência $(\sqrt[2n-1]{1/3^n})$, a qual converge para $1/\sqrt{3}$. (Note que se $a > 0$ então $|\sqrt[2n-1]{a^n} - \sqrt{a}|$ pode ser escrito como $\sqrt{a}|a^{\frac{n}{2n-1}-\frac{1}{2}} - 1| = \sqrt{a}|(\sqrt{a})^{\frac{1}{2n-1}} - 1|$ e $|(\sqrt{a})^{\frac{1}{2n-1}} - 1|$ tende a zero quando $n \to \infty$ já que $(\sqrt{a})^{\frac{1}{2n-1}}$ é uma subsequência de uma sequência do tipo $\sqrt[n]{b}$, a qual tende a um, para qualquer $b > 0$; veja um exemplo do livro-texto.) Tomando índices pares obtemos a subsequência constante $(\sqrt[2n]{1/2^n}) = (1/\sqrt{2})$, logo existe $0 < c < 1$ tal que $|a_n| < c$ para todo n suficientemente grande (tome $c = 1/\sqrt{3}$). (**2,5 pontos**)