1. (*2.0 pontos*) Considere a equação

$$(x^2 + y^2)\, dx + (4xy^3 + 2xy + \frac{4}{3}yx^3)\, dy = 0$$

   (a) (0.5) Mostre que a equação não é exata

   (b) (0.5) Calcule um fator integrante que a torna exata.

   (c) (1.0) Resolva a equação diferencial exata.

2. (*1.0 pontos*) Suponha que $p(t)$ e que $q(t)$ são contínuas e que y_1 e y_2 são soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ em um intervalo aberto I. Prove que se y_1 e y_2 se anulam em um mesmo ponto em I então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

3. (*3.0 pontos*)

   (a) Resolva a equação de Euler abaixo.

$$4x^2y'' - 4xy' + 3y = 0, \quad x > 0.$$

   (b) Resolva a equação não homogênea abaixo via variação de parâmetros. (Obs: a homogênea associada está no ítem (a)).

$$4x^2y'' - 4xy' + 3y = 8x^{\frac{4}{3}}, \quad x > 0.$$

4. (*2.0 pontos*) Escreva $g(t)$ utilizando funções degrau e calcule a sua transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{g(t)\}$.

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1 - t, & 1 \le t < 2 \\ -1, & 2 \le t \end{cases}$$

5. (*2.0 pontos*) Resolva por transformada de Laplace o seguinte PVI:

$$y'' + 4y' + 5y = \delta\,(t - \pi)$$

onde $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.

1. (a) $M_y = 2y, \quad N_x = 4y^3 + 2y + 4yx^2$] (0,2)

$M_y \neq N_x$ ∴ a equação não é exata.] (0,3)

(b) Equação do fator integrante:

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

$$(M_y - N_x)\mu + M\mu_y - N\mu_x = 0.$$

$$M_y - N_x = -4y^3 - 4yx^2 = -4y\,(y^2+x^2) = -4y\,M$$

∴ $(M_y - N_x)/M = -4y$] (0,2)

∴ temos um fator integrante resolvendo a equação

$$\frac{M_y - N_x}{M}\mu + \mu'(y) = 0$$

$$\mu' - 4y\mu = 0:$$

$$\mu'/\mu = 4y$$

$$(\ln\mu)' = 4y$$

$$\ln\mu = \int 4y\,dy \quad (+c)$$

$$= 2y^2$$

$$\boxed{\mu = e^{2y^2}}$$

(0,3)

(c)

$$\psi_x = \mu \cdot M = e^{2y^2}(x^2+y^2)$$

$$\psi = \int e^{2y^2}(x^2+y^2)\,dx + g(y)$$

$$\psi = e^{2y^2}\left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) + g(y).$$

(0,3)

$$\begin{cases} \psi_y = 4ye^{2y^2}\left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) + e^{2y^2}\cdot 2xy + g'(y) \\ \text{e} \quad \psi_y = \mu N = e^{2y^2}\left(4xy^3 + 2xy + \frac{4}{3}yx^3\right) \end{cases}$$

(0,3)

∴ $g'(y) = 0$. Podemos tomar $g(y) = 0$.] (0,2)

Então o "potencial" ψ pode ser $\psi = e^{2y^2}\left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)$.
Logo, a solução (geral) da equação é dada por

$$\boxed{e^{2y^2}\left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) = C}$$

(0,2)

2. 0,5 Se $y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0$ então o wronskiano $W = W(y_1, y_2)(t_0)$

$$= \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Mas se y_1, y_2 fosse um CFS, teríamos $W \neq 0$ em todo ponto de I, cf. teorema visto. 0,5

---

3. (a) $x^2 y'' - x y' + \frac{3}{4} y = 0$

Eq. de Euler $x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$, com $\alpha = -1$ e $\beta = 3/4$. 0,3

Logo a eq. de incidência é $r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$

$$r^2 + (\alpha - 1) r + \beta = 0$$

$$r^2 - 2r + \frac{3}{4} = 0.$$

Raízes: $r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{3}{4}}}{2} = \dfrac{2 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3/2 \\ 1/2 \end{cases}.$ 0,4

CFS: $y_1 = x^{3/2}$, $y_2 = x^{1/2}$

Solução (geral): $\boxed{y = c_1 x^{3/2} + c_2 x^{1/2}}$ 0,3

(b) Uma solução particular: $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$ 0,2

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = 2x^{-2/3} \end{cases}$$ 0,2

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{3/2} & x^{1/2} \\ \frac{3}{2}x^{1/2} & \frac{1}{2}x^{-1/2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x = -x$$ 0,2

$$v_1' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & x^{1/2} \\ 2x^{-2/3} & \frac{1}{2}x^{-1/2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} \cdot \left(-2\, x^{-2/3} \cdot x^{1/2}\right) = 2x^{-7/6}$$

$$v_1 = 2 \int x^{-7/6} dx = \frac{2}{-7/6 + 1} x^{-7/6 + 1} \quad (+c)$$ 0,5

$$\boxed{v_1 = -12 x^{-1/6}}$$

Cont. $\boxed{3.}$ (b) :

$$v_2' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} x^{3/2} & 0 \\ \frac{3}{2}x^{1/2} & 2x^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} \cdot 2x^{5/6} = -2x^{-1/6}$$ (0,5)

$$\boxed{v_2 = -2\int x^{-1/6}\,dx = -\frac{12}{5}x^{5/6}} \quad (+c).$$

Solução geral :

$$y = -12x^{-1/6} \cdot x^{3/2} - \frac{12}{5}x^{5/6} \cdot x^{1/2} + c_1 x^{3/2} + c_2 x^{1/2}$$ (0,2)

$$y = c_1 x^{3/2} + c_2 x^{1/2} - 12x^{8/6} - \frac{12}{5}x^{8/6}$$

$$\boxed{y = c_1 x^{3/2} + c_2 x^{1/2} - \frac{72}{5}x^{4/3}}$$ (0,2)

$\boxed{4.}$ $g(t) = \overbrace{-u_1(t)(t-1)}^{0,5} + \overbrace{u_2(t)(t-2)}^{0,5}$

$$\mathcal{L}\{g\} = -\mathcal{L}\{u_1(t)(t-1)\} + \mathcal{L}\{u_2(t)(t-2)\}$$

$$= -e^{-s}\mathcal{L}\{t\} + e^{-2s}\mathcal{L}\{t\}$$ (0,5)

$$= (-e^{-s} + e^{-2s})\frac{1}{s^2}.$$ (0,5)

$\boxed{5.}$ $\mathcal{L}\{y'' + 4y' + 5y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - s\,y(0) - y'(0) + 4s\mathcal{L}\{y\} - 4y(0) + 5\mathcal{L}\{y\} = e^{-\pi s}$$ (0,4)

$$(s^2+4s+5)\mathcal{L}\{y\} - 2s - 8 = e^{-\pi s}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2s+8}{s^2+4s+5} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+4s+5}$$

$$(\Delta = 16 - 4\times 5 = -20 < 0)$$

Cont. 5.

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2s+8}{(s+2)^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{(s+2)^2+1} \quad (0,4)$$

$$= 2\,\frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} + \frac{4}{(s+2)^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{(s+2)^2+1} \quad (0,3)$$

$$y = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+2)^2+1}\right\}$$

$$\boxed{y = \underbrace{2e^{-2t}\cos t}_{0,3} + \underbrace{4e^{-2t}\operatorname{sen} t}_{0,3} + \underbrace{u_{\pi}(t)\,e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)}_{0,3}}$$