DM–IMECC–UNICAMP, Análise I, Prof. Marcelo M. Santos

Exame Final, 15/07/2009

Aluno: ___________________ **RA:**_________ **Ass.:** ___________________

Observações: *Tempo de prova: 100min; Justifique sucintamente todas as suas afirmações; Disponha as suas resoluções das questões nas folhas em branco (***frente e verso***) em ordem crescente e da seguinte forma:*

1a. folha - Q.1; 2a. folha - Q.2; 3a. folha - Q.3; 4a. folha - Q.4.

A última folha pode ser usada para rascunho.

Proibido usar calculadora. Não desgrampear a prova. Desligar o celular.

Questão 1. a) (1,5 pontos) Seja X um subconjunto dos números reais limitado inferiormente. Defina $\inf X$ (o *ínfimo* de X) justificando porque ele existe (*0,5 pontos*) e prove que $\inf X = -\sup(-X)$, onde $-X := \{-x; x \in X\}$ (*1,0 ponto*).

b) (1,0 ponto) Dê as definiçõs de sequência monótona e sequência limitada e enuncie o Teorema de Bolzano-Weierstrass (*0,6 pontos*). Prove que a sequência (x_n) definida por $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = (x_n + 2/x_n)/2$ é convergente (*0,4 pontos*). *Sugestão:* Note que $(x + 2/x)^2/4 \geq 2$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, e $(x + 2/x)^2/4 \leq x^2$, para todo x tal que $x^2 \geq 2$.

c) (1,5 pontos). Falso ou verdadeiro: Se uma série converge então ela converge absolutamente. Se verdadeiro, prove; se falso, dê um contra-exemplo, sem esquecer de justificar todas as suas afimações.

Questão 2. a) (1,0 ponto). Caracterize um conjunto compacto (qualquer) via sequências e subsequências (*0,5 pontos*) e mostre que se $X, Y \subset \mathbb{R}$ são compactos então o conjunto $X \cdot Y := \{x \cdot y; x \in X \text{ e } y \in Y\}$ também é compacto. (*0,5 pontos*)

b) (1,5 pontos). Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$; $g(0) = 1$ e $g(x) = 0$ se $x \neq 0$. Mostre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$ (*1,0 ponto*) porém não existe $\lim_{x\to 0} g(f(x))$. (*0,5 pontos*)

c) (1,5 pontos). Enuncie o Teorema do Valor Intermediário (*0,5 pontos*) e sabendo que a função $f(x) = x^2$ é contínua, mostre a existência de $\sqrt{2}$, i.e. que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 = 2$ (*1,0 ponto*).

OU **(exclusivo)**

Questão 2 (2,0 pontos). Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua e $g : \overline{X} \to \mathbb{R}$ definida por $g(z) = f(z)$ se $z \in X$ e $g(z) = \lim_{x\to z} f(x)$ se $z \in X'/X$. Mostre que g é uniformemente contínua.

Questão 3. Denotemos por $I \subset \mathbb{R}$, um intervalo aberto qualquer, e $f : I \to \mathbb{R}$, uma função qualquer.

a) (1,0 ponto). Suponhamos que f seja derivável e tenha um conjunto de raízes com um ponto de acumulação $c \in I$. Mostre que c também é uma raiz (*0,2 pontos*) e que é um ponto crítico ($f'(c) = 0$). (*0,8 pontos*)

b) (1,0 ponto). Falso ou verdadeiro?

i) Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ então f é constante;

ii) Se f é derivável então f é de classe C^1 i.e. f' é contínua.

No caso verdadeiro, prove, e no caso falso, dê um contra-exemplo.

c) (1,0 ponto). Suponhamos que f seja três vezes derivável num ponto $a \in I$. Enuncie a fórmula de Taylor com polinômio de grau dois e com resto de Lagrange (*0,5 pontos*) e mostre que se $f'(a) = f''(a) = 0$ e $f^{(3)}(a) > 0$ então a é um 'ponto de máximo local à direita' e um 'ponto de mínimo local à esquerda', i.e. existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(a) < f(y)$ para quaisquer $x \in (a-\delta, a)$ e $y \in (a, a+\delta)$. (*0,5 pontos*)

Questão 4 (2,0 pontos). Seja $h : (-1,1) \to \mathbb{R}$ contínua exceto no ponto $x = 0$. Mostre que se existem os limites laterais $\lim_{x\to 0+} h(x)$, $\lim_{x\to 0-} h(x)$, e $\lim_{x\to 0+} h(x) \neq \lim_{x\to 0-} h(x)$, então não existe uma função $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f' = h$. *Sugestão*: Use o o Teorema de Darboux 'do valor intermediário para a derivada'.

OU **(exclusivo)**

Questão 4 (2,0 pontos). Defina função convexa (*0,5 pontos*). Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa no intervalo aberto I. Dado $c \in I$ (qualquer) mostre que a função $\varphi(x) = [f(x) - f(c)]/(x - c)$ é monótona não decrescente no intervalo $I \cap (c, \infty)$ (*0,5 pontos*) e que $\varphi(x) \geq [f(a) - f(c)]/(a - c)$ para todo x nesse intervalo, onde a é um ponto qualquer em $I \cap (-\infty, c)$ (*0,5 pontos*). Conclua que existe a derivada lateral $f'_+(c)$ (*0,5 pontos*).

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!

Gabarito

Questão 1. a) Um dos axiomas dos números reais (talvez o principal) é que todo conjunto limitado superiormente possui uma menor cota superior, a qual chama-se supremo. O ínfimo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente é definido como sendo a maior das cotas inferiores de X, a qual existe e é igual $-\sup(-X)$. Com efeito, X ser limitado inferiormente é equivalente a $-X$ ser limitado superiormente ($c \leq x \Leftrightarrow -x \leq -c$) (**0,5 pontos** até aqui) e escrevendo $b = \sup(-X)$, pela definição de supremo e pela definição de $-X$, temos:

i) $-x \leq b$, logo, $x \geq -b$, $\forall\, x \in X$, i.e. $-b$ é uma cota inferior de X e; (+ **0,5 pontos**)

ii) se c é qualquer cota inferior de X então $-c$ é uma cota superior de $-X$, logo, $b \leq -c$ (pois b é a menor cota superior de $-X$)) i.e. $c \leq -b$. Portanto, $-b$ é a maior cota inferior de X. (+ **0,5 pontos**)

b) Uma sequência (x_n) (de números reais) é dita monótona se ela é não decrescente ($x_n \leq x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$) ou não crescente ($x_n \geq x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$). (**0,2 pontos** até aqui.)

Uma sequência (x_n) (de números reais) é dita limitada se existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq c$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. (+ **0,2 pontos**)

Teorema de Bolzano-Weierstrass (v. livro-texto). (+ **0,2 pontos**)

A sequência dada (um exemplo do livro-texto) é não crescente e limitada, logo convergente, por um teorema visto em aula (do livro-texto). Com efeito, satisfaz $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois $x_1 = 2 > 0$ e se $x_n > 0$ então também $x_{n+1} = (x_n + 2/x_n)/2 > 0$) e $x_n \geq \sqrt{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $x_1 = 2 > \sqrt{2}$ e $x_{n+1}^2 = (x_n + 2/x_n)^2/4 \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $(x+2/x)^2/4 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot (2/x) + (2/x)^2 \geq 8 \Leftrightarrow (x - 2/x)^2 \geq 0$) logo, a sequência é limitada inferiormente (por $\sqrt{2}$). (+ **0,2 pontos**)

Além disso, $x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_{n+1}^2 \leq x_n^2 \Leftrightarrow (x_n + 2/x_n)^2/4 \leq x_n^2$, o que vale, pois para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 \geq 2$, temos $(x+2/x)^2/4 \leq x^2$ ($x^2 \geq 2 \Rightarrow (x+2/x)^2/4 \leq (x + x^2/x)^2/4 = (2x)^2/4 = x^2$). (+ **0,2 pontos**)

c) Falso (**0,5 pontos**).

A série alternada $\sum(-1)^n/n$ é convergente, pelo Teorema de Leibniz, (+ **0,5 pontos**)

mas $\sum |(-1)^n/n| = \sum 1/n$ (a séria harmônica) é divergente. (+ **0,5 pontos**)

Questão 2. a) Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos de K tem uma subsequência convergente

(**0,25 pontos**)

para um ponto de K. (+ **0,25 pontos**)

Seja $(x_n \cdot y_n)$ uma sequência qualquer de pontos de $X \cdot Y$. Como X é compacto existe uma subsequência (x_{n_j}) convergente para um ponto $x \in X$.

(+ **0,5/3 pontos**)

Como Y também é compacto, a sequência (y_{n_j}) tem uma subsequência $(y_{n_{j_k}})$ convergente para um ponto $y \in Y$. (+ **0,5/3 pontos**)

Daí, tomando o limite $\lim_{k\to\infty}$, obtemos que a subsequência $(x_{n_{j_k}} \cdot y_{n_{j_k}})_k$ converge para o ponto $x \cdot y \in X \cdot Y$. (+ **0,5/3 pontos**)

b) $|f(x)| \leq |x|$ para todo x, logo, pelo Teorema do Confronto ('Regra do Sanduíche') temos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. (+ **0,5 pontos**)

$g(x) = 0$ para todo $x \neq 0$, logo, $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$.

(+ **0,5 pontos**)

Se $x \in \mathbb{Q}$ e $x \neq 0$, temos $g(f(x)) = g(x) = 0$, e se $x \notin \mathbb{Q}$, temos $g(f(x)) = g(0) = 1$, logo não existe $\lim_{x\to 0} g(f(x))$, pois tomando uma sequencia de racionais x_n tendendo a zero, temos $\lim g(f(x_n)) = \lim 0 = 0$, e tomando uma sequencia de irracionais y_n tendendo a zero, temos $\lim g(f(y_n)) = \lim 1 = 1 \neq \lim g(f(x_n))$. (+ **0,5 pontos**)

c) Teorema do Valor Intermediário (v. livro-texto). (+ **0,5 pontos**)

$0 = f(0) < 2 < f(2) = 4$, (+ **0,5 pontos**)

logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe a ($\in (0,2)$) tal que $f(a) = 2$, i.e. $a^2 = 2$. (+ **0,5 pontos**)

Segunda Questão 2. *Uma maneira*: Seja $\epsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua, existe um $\delta > 0$ tal que

$$(*) \qquad x, y \in X,\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(**0,4 pontos** até aqui.)

Dados $x, y \in \overline{X}$, pela definição de fecho, existem sequências $x_n, y_n \in X$ tais que $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$. (+ **0,4 pontos**)

Se tomarmos $x, y \in X$ com $|x - y| < \delta/3$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - x|, |y_n - y| < \delta/3$, teremos $|x_n - y_n| < \delta$ para todo $n > n_0$

(+ **0,4 pontos**)

(de fato, $|x_n - y_n| \leq |x_n - x| + |x - y| + |y_n - y| < \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta$). Então, por $(*)$, segue-se que $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$ para todo $n > n_0$.

(+ **0,4 pontos**)

Daí, tomando o limite $\lim_{n\to\infty}$, obtemos $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ para quaisquer $x, y \in \overline{X}$ tais que $|x - y| \leq \delta/3$. Portanto, g é uniformemente contínua.

(+ **0,4 pontos**)

<u>*Outra maneira*</u> – Por contradição: Suponhamos que g não seja uniformemente contínua. Então (pela negação da definição de continuidade uniforme) existem um $\epsilon > 0$ e sequências $x_n, y_n \in \overline{X}$ tais que $|x_n - y_n| < 1/n$ e $|g(x_n) - g(y_n)| \geq \epsilon$, para todo $\in \mathbb{N}$. (**0,4 pontos** até aqui.)
Pela definição de g, existem $x_n', y_n' \in X$ tais que $|x_n' - x_n| < 1/n, |y_n' - y_n| < 1/n$, $|f(x_n') - f(x_n)| < \epsilon/3$ e $|f(y_n') - f(y_n)| < \epsilon/3$ (tome $x_n' \equiv x_n$ se $x_n \in X$; analogamente, tome $y_n' \equiv y_n$ se $y_n \in X$) (+ **0,4 pontos**)
Daí, temos sequências $x_n', y_n' \in X$ tais que $\lim(x_n' - y_n') = 0$, (+ **0,4 pontos**) e, somando e subtraindo o termo $g(x_n) - g(y_n)$, temos

$$\begin{aligned} |f(x_n') - f(y_n')| &= |\,(g(x_n) - g(y_n)) + (f(x_n') - g(x_n)) + (g(y_n) - f(y_n'))\,| \\ &\geq |g(x_n) - g(y_n)| - |f(x_n') - g(x_n)| - |f(y_n') - g(y_n)| \end{aligned}$$

(pela desigualdade triangular 'ao reverso') (+ **0,4 pontos**)

$$\geq \epsilon - \epsilon/3 - \epsilon/3 = \epsilon/3\,,$$

logo, f não pode ser uniformemente contínua. (+ **0,4 pontos**)

Questão 3. a) Como c é um ponto de acumulação de raízes de f, existe uma sequência (c_n) de raízes de f tais que $c_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim c_n = c$.

(**0,4 pontos**)

Como f é derivável, temos que f é contínua, logo, $f(c) = \lim f(c_n) = \lim 0 = 0$. (**0,2 pontos**)

Daí, da primeira conclusão e da definição de derivada, temos:

$$f'(c) := \lim \frac{f(c_n) - f(c)}{c_n - c} = \lim \frac{0 - 0}{c_n - c} = \lim 0 = 0.$$

(+ **0,4 pontos**)

b) i) Verdadeiro (**0,1 pontos**). Prova: Seja x_0 um ponto (arbitrário) em I. Dado qualquer $x \neq x_0$ em I, pelo Teorema do Valor Médio, temos

$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ para algum c entre x_0 e x. Mas $f'(c) = 0$, pela hipótese, então $f(x) - f(x_0) = 0$, donde $f(x) = f(x_0)$ para todo $x \in I$, i.e. f é constante.

(**0,4 pontos**)

ii) Falso (**0,1 pontos**). Contra-exemplo (dado em aula; do livro-texto): Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \text{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Para $x \neq 0$, temos $f'(x) = 2x\text{sen}(1/x) - \cos(1/x)$ e para $x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \text{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\text{sen}(1/x) = 0,$$

logo, f é derivável (+ **0,2 pontos**)
mas não existe o limite $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(2x\text{sen}(1/x) - \cos(1/x))$, logo, f' não é contínua (no ponto $x = 0$). (+ **0,2 pontos**)

c) Fórmula de Taylor com polinômio de Taylor de grau dois e com resto de Lagrange:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c)}{2}(x - a)^2, \ x, a \in I,$$

para algum c entre x e a. (**1,0 ponto** até aqui.)

Para a segunda parte desta questão deveria ter sido pedida a fórmula de Taylor infinitesimal com polinômio de grau três:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + r(x), \ x, a \in I,$$

onde o resto $r(x)$ satisfaz $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^3} = 0$, ou, de forma equivalente,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + r(h), \ a, a + h \in I,$$

com $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^3} = 0$. Daí e da hipótese $f'(a) = f''(a) = 0$, vem

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + \tfrac{f^{(3)}(a)}{6}h^3 + r(h), \\ f(a + h) - f(a) &= \left[\tfrac{f^{(3)}(a)}{6} + \tfrac{r(h)}{h^3}\right] h^3, \end{aligned}$$

logo, como $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^3} = 0$ e $f^{(3)}(a) > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(a + h) > f(a)$ se $0 < h < \delta$ e $f(a + h) < f(a)$ se $-\delta < h < 0$.

(+ **0,5 pontos** extras para quem fez esta parte.)

Questão 4. Suponhamos $\lim_{x\to 0-} h(x) < \lim_{x\to 0+} h(x)$ (caso $\lim_{x\to 0-} h(x) > \lim_{x\to 0+} h(x)$, o raciocínio é análogo). Escrevamos $a = \lim_{x\to 0-} h(x)$ e $b = \lim_{x\to 0+} h(x)$. Pela 'permanência do sinal', existe um $\delta > 0$ tal que $h(x) < (a+b)/2$ para todo $x \in (-\delta, 0)$ e $h(x) > (a+b)/2$ para todo $x \in (0, \delta)$.

(**1,0 ponto**)

Se f existisse, teríamos então

$$f'(x) = h(x) \ < \ (a+b)/2 \ < \ h(y) = f'(y),$$

para $x \in (-\delta, 0)$ e $y \in (0, \delta)$, logo, pelo Teorema de Darboux, existiria $c \in (-\delta, \delta)$ tal que $f'(c) = h(c) = (a+b)/2$, o que resulta numa contradição, pois $h(x) \neq (a+b)/2$ para todo $x \in (-\delta, \delta)$. (**1,0 ponto**).

Segunda Questão 4. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ definida no intervalo I é dita convexa se dados $a < x < b$ quaisquer em I, temos

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad \text{(}\textbf{0,5 pontos} \text{ até aqui.)}$$

ou, equivalentemente,

$$f(x) \leq f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b),$$

(o gráfico da função está acima de qualquer uma uma de suas secantes; notemos que $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $y = f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$ são equações equivalentes da reta passando pelos pontos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$) donde,

$$(*) \qquad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x},$$

sempre que $a < x < b$. Escrevendo c no lugar de a, obtemos

$$\varphi(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = \varphi(b)$$

para quaisquer $c < x < b$ em I, i.e. a função φ é não decrescente em $I \cap (c, \infty)$.

(**0,5 pontos**)

Aém disso, dados $a < c < x$, escrevendo em $(*)$ x no lugar de b e c no lugar de x, obtemos

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \varphi(x),$$

logo, φ também é limitada inferiormente no intervalo $I \cap (c, \infty)$ (por $(f(c) - f(a))/(c - a)$).

(**0,5 pontos**.)

Toda função não decrescente limitada inferiormente possui o limite pela direita em qualquer um de seus pontos de acumulação à direita. Logo, existe o limite

$$\lim_{x \to c+} \varphi(x) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} =: f'_+(c).$$

(**0,5 pontos**.)