Caros Danilo, Letícia, Vitor e Julia,

O problema indicado por mim para o T4 de vocês é o seguinte:

Mostre que, para θ em um intervalo apropriado de comprimento π, a equação

$$Asen\theta + B\cos\theta = c$$

tem exatamente 2 soluções, para cada $c < \sqrt{A^2 + B^2},\ c \geq 0$.

Este problema deve ser resolvido no Trabalho em 2 níveis distintos (entre EF, EM e ES).

Sugiro vocês resolverem a nível de EM (usando só matéria do EM) pondo $R^2 = A^2 + B^2, A = R\cos\alpha, B = R\text{sen}\alpha$ e transformando a equação em $R\text{sen}(\theta+\alpha) = c$. Daí, analisando o gráfico da função (usandos as propriedades do) seno, concluirem o resultado.

A nível de ES (usando matéria do ES que não é do EM) tenho a seguinte sugestão (de forma resumida)/dicas:

$$f(\theta) = A\text{sen}\theta + B\cos\theta$$
$$f'(\theta) = A\cos\theta - B\text{sen}\theta$$

Os casos $A = 0, B = 0$ são fáceis de analisar. Talvez fosse bom explicar o problema logo nesses casos. (Em particular, os casos $A = 1, B = 0$ e $A = 0, B = 1$ são bem simples de resolver.) Assim, vamos supor a partir de agora que $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

Notem que quando $\cos\theta = 0$, temos $f(\theta) \neq 0$ e também $f'(\theta) \neq 0$. Então, temos que

$$f(\theta) = 0 \Leftrightarrow \text{tg}\theta = -\frac{B}{A}$$

e

$$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \text{tg}\theta = \frac{A}{B}.$$

Notem que também podemos escrever

$$f'(\theta) = (\frac{A}{B} - \text{tg}\theta)B\cos\theta, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Logo, pondo $\theta_0 := \text{arctg}\frac{A}{B}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, e θ_1, θ_2 tais que $\text{tg}\theta_1 = \text{tg}\theta_2 = -\frac{B}{A}$, $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ e $\theta_2 - \theta_1 = \pm\pi$, obtemos que θ_0 é um ponto de máximo ou de mínimo de $f(\theta)$ no intervalo $[\theta_1, \theta_2]$. Além disso, calculando $f(\theta_0)$, obtemos

$$f(\theta_0) = \pm\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Daí, podemos concluir o resultado desejado (esbocem o gráfico de f no intervalo $[\theta_1, \theta_2]$).

A apresentação de vocês será no dia 13/11, às 11h.

Lembro que o trabalho deve conter mais 4 problemas, os quais podem ser escolhidos à vontade por vocês, mas não semelhantes, e, neste trabalho (T4), sobre trigonometria e aplicações. Dois destes 4 problemas escolhidos por vocês devem ser resolvidos usando explicitamente a teoria, vista (exposta) em aula, ou não.

Lembro também que no dia da apresentação o grupo deve trazer (por escrito) a lista de todos os problemas (5 problemas e as resoluções, de todos os problemas/todas as soluções); trazer 3 cópias, para distribuir para os demais grupos, e, trazer mais uma cópia com pontuação (gabarito) para me entregar. Além disso, não esqueça de me enviar por email um cópia do trabalho, para divulgação para todos.

Att,
Marcelo Santos
Prof./DM/IMECC/UNICAMP