Marcelo Santos
msantos@ime.unicamp.br.

$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - MA-141 - 20/04/06

VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

1. Determine a extremidade ou a origem do segmento orientado nos seguintes casos:
a) Representa o vetor $v = (1, -2, 1)$ e sua origem é o ponto $P = (1, 0, 1)$, isto , queremos um vetor com origem no ponto P e que tenha norma, direção e sentido iguais ao vetor que tem origem no ponto $O = (0, 0, 0)$ e extremidade no ponto $(1, -2, 1)$.
b) Representa o vetor $v = (-1, 0, 1)$ e sua origem é o ponto médio entre os pontos $P_1 = (1, 1, 3)$ e $P_2 = (-1, 1, 1)$.
c) Representa o vetor $v = (1, 1, 1)$ e sua extremidade é o ponto $P = (1, 1, 1)$.

2. Verifique se os pontos dados abaixo são colineares:
a) $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 2, 0)$ e $C = (0, -2, 2)$
b) $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 2, 0)$ e $C = (0, 2, 1)$

3. Dados os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 1, 1)$ e $C = (0, 1, 2)$.
a) Determine o ponto D tal que A,B,C e D sejam os vértices consecutivos de um paralelogramo
b) Determine o ponto médio entre A e C e o ponto médio entre B e D.

4. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio (Sugestão: Sejam M e N os pontos médios das duas diagonais. Mostre $\overline{MN} = \vec{0}$)

5. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos das bases.

6. a) Demonstre que não existe x tal que os vetores $v = (x, 2, 3)$ e $u = (x, -2, 3)$ sejam perpendiculares.
b)Encontre o angulo entre os vetores $u = (2, 1, 0)$ e $v = (0, 1, -1)$ e entre os vetores $w = (1, 1, 1)$ e $z = (0, -2, -2)$.

7. a) Dado um triângulo isósceles. Mostre que a mediana relativa à base é a mediatriz (ie, é perpendicular à base).
b) Mostre que: Se um triângulo tem duas medianas iguais então ele é isósceles.

PRODUTO VETORIAL E PRODUTO MISTO

8. a) Determine, se existir, os valores de x para que o vetor $v = x\vec{i} + 6\vec{k}$ seja paralelo ao produto vetorial de $w = \vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$ por $u = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$
b) Determine x para que os pontos $A = (x, 1, 2)$, $B = (2, -2, -3)$, $C = (5, -1, 1)$ e $D = (3, -2, -2)$ sejam coplanares.

9. Encontre o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores u, v e w nos seguintes casos:

a) Dados os pontos $A = (1,3,4)$, $B = (3,5,3)$, $C = (2,1,6)$ e $D = (2,2,5)$ tome $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD} = (1,3,4)$.

b) $u = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $v = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $w = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

10. Sejam u e v vetores no espaço. Mostre que

a) $(u + v) \times (u - v) = 2v \times u$

b) Se $u \times v$ é não nulo e w é um vetor qualquer no espaço então existem números reais a, b e c tal que $w = a(u \times v) + bu + cv$.

c) Se $u \times v$ é não nulo e u é ortogonal a v então $u \times (u \times v)$ é paralelo a v.

11. Responda, justificando, falso ou verdadeiro a cada uma das seguintes afirmações:

a) Se u, v e w são vetores no espaço, com v não nulo e $v \times u = v \times w$ então $u = w$

b) Se u, v e w são vetores no espaço então: $\mid u.(v{\times}w) \mid = \mid v.(u{\times}w) \mid = \mid w.(v{\times}u) \mid = \mid v.(w{\times}u) \mid$

c) Se u, v e w são vetores no espaço então $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$.

d) Se u, v e w são vetores no espaço, u é não nulo e $u \times v = u \times w = \vec{0}$ então $v \times w = \vec{0}$.

RETAS E PLANOS NO ESPAÇO

12. Para cada um dos casos abaixo encontre equações paramétricas e equações simétricas para a reta r:

a) A reta r passa pelos pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (2,3,1)$.

b) A reta r tem vetor diretor $v = (1,1,-1)$ e passa pelo ponto $P_0 = (0,1,7)$.

c) A reta r passa pelo ponto $P_0 = (1,-1,1)$, é paralela à reta $l : x - 1 = y = \frac{2z-2}{3}$ e ortogonal ao eixo z .

d) A reta r é perpendicular ao plano $2x - y + 2z = 4$ e passa pelo ponto de interseção das retas l_1 e l_2 dadas por:

$$l_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad l_2 : \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 1 + s \\ z = 0 \end{cases}, \; s \in \mathbb{R}$$

e) A reta r é a interseção dos planos $x + y + 2z = 1$ e $2x - y + z = 2$.

13. Para cada par de retas r e l abaixo encontre $l \cap r$. E nos casos em que a interseção é vazia decida se elas são paralelas ou reversas.

a) $r : \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}$ e $l : \begin{cases} 3x + 2y + z = -2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$

b) $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3}$ e $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3}$

c) $r : \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$ $l : \begin{cases} x - 3y + z = -3 \\ 3x - y - z = -5 \end{cases}$

14. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação do plano π.

a) O plano π passa pelo ponto $P = (3,1,2)$ e tem vetor normal $N = (1,2,-3)$.
b) O plano π passa pelos pontos $A = (0,0,2)$, $B = (2,4,1)$ e $C = (-2,3,3)$
c) Tem-se que $C = (-5,1,2) \in \pi$ e que π é perpendicular à reta que passa pelos pontos $A = (2,2,-4)$ e $B = (7,-1,3)$.
d) O plano π é perpendicular ao plano $x + 3y - z = 7$ e contém os pontos $A = (2,0,5)$ e $B = (0,2,-1)$.
e) O plano π é perpendicular a cada um dos planos $x - y - 2z = 0$ e $2x + y - 4z - 5 = 0$ e contém o ponto $A = (4,0,-2)$

15. a) Encontre a distância do plano $\pi : 2x + 2y - z = 6$ e o ponto $P = (2,2,-4)$.
b) Encontre a distância perpendicular entre os planos (paralelos):

$$4x - 8y - z = 9 \quad \text{e} \quad 2x - 4y - \frac{z}{2} = 5$$

.
c) Verifique que a reta $x - 1 = z - 2$ e $y = 3$ é paralela ao plano $x + 2y - z = 3$ e encontre a distância perpendicular entre eles.

16. a) Sejam r : a reta $x - 1 = y = z$ e A, B os pontos $A = (1,1,1)$ e $B = (0,0,1)$. Encontre o ponto de r eqüidistante de A e B.
b) Dados o plano $x - y + z = 1$ e o ponto $P = (1,0,1)$. Encontre o ponto Q que é simétrico a P em relação ao plano dado.

17. Sejam $P = (a,b,c)$ um ponto no espaço e r a reta $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$. Para cada par, não nulo, de números reais (m,n) considere o plano

$$\pi_{(m,n)} : (m+n)x + (m-2n)y + (2m+n)z = 4m + 5n$$

.
Mostre que: $P \in r$ se e somente se $P \in \pi_{(m,n)}$, para todo par não nulo (m,n).

18. Dados os dois pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, mostre que o lugar geométrico dos pontos do espaço que eqüidistam de A e B é um plano que passa pelo ponto médio de A e B e é perpendicular à reta que contém A e B.

19. Considere as retas r e l dadas por:
r: $x = 0$, $y = 2 + t$ e $z = 1 + t$ $\qquad$ l: $x - 2 = z + 1$ e $y = 3$.
a) Mostre que r e l são reversas.
b) Encontre os planos π e α tais que: $r \subset \pi$, $l \subset \alpha$ e π é paralelo a α.
c) Encontre a distância entre os planos π e α do item anterior.
d) Encontre P em r e Q em l tais que a reta que passa por P e Q seja perpendicular a r e a l.

20. Considere os planos $\alpha : x - y + z - 3 = 0$ e $\beta : 2m^2x - (m+1)y + 2z = 0$.
a) Determine m, em cada caso, para que os planos α e β sejam: paralelos; concorrentes e concorrentes ortogonais.
b) Para $m = -1$ encontre a equação da reta interseção entre α e β.

Resolvendo 4ª L

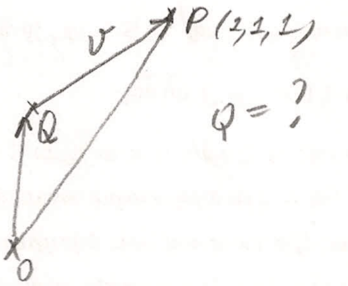
(1.)

a) $v + P = (2, -2, 2)$ ← extremidade

b) $M = (0, 1, 2)$

$M + v = (-1, 1, 3)$.

c)



$Q = ?$

$\vec{OQ} + v = \vec{OP}$

$\vec{OQ} = \vec{OP} - v$.

$= (1,1,1) - (1,1,1) = (0,0,0)$ origem

(2) a) AB // AC, BC

Reciprocamente,

• $AB = \alpha AC \Rightarrow B - A = \alpha (C - A) \Rightarrow B = A + \alpha (C - A)$

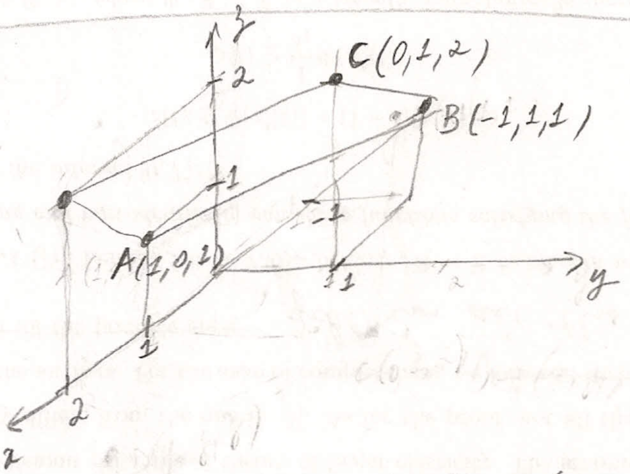
• $AB = \beta BC \Rightarrow B - A = \beta (C - B) \Rightarrow A = B - \beta (C - B)$

$B - A = \alpha (C - A) = \beta (C - B) \Rightarrow (C - A) = \beta/\alpha (C - B)$

$\therefore B = A + \frac{\beta}{\alpha}(C - B)$

V. próx. pág.

(3) a)



$\vec{AB} = \vec{DC}$ $\quad (-2, 1, 0) = (-x, 1-y, 2-z) \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ 1-y = 1 \\ \boxed{y = 0} \\ \boxed{z = 2} \end{cases}$

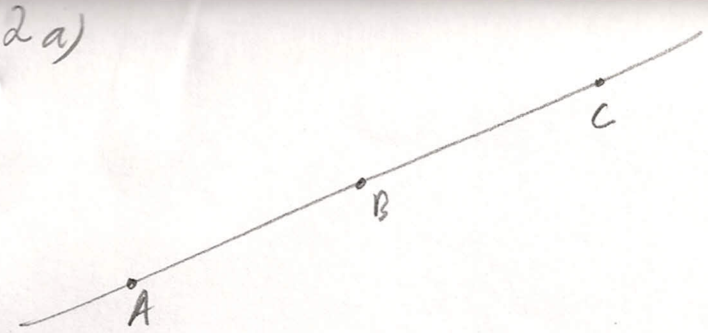
$(\vec{BC} = \vec{AD} \quad (1, 0, 1) = (x-1, y, z-1))$

não precisa as duas eq's.

$\therefore D = (2, 0, 2)$.

Anexo: 4ª L (2)

2 a)



Sup. $AB \parallel AC$, BC. ¿ A, B, C são colineares?

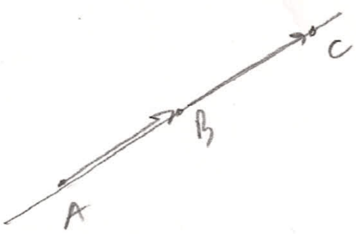
$$AB = \alpha AC \Rightarrow B-A = \alpha(C-A)$$
$$AB = \beta BC \Rightarrow B-A = \beta(B-C)$$
$$\Rightarrow$$

$$\alpha(C-A) = \beta(B-C)$$

$$\therefore \quad B-A = \beta(B-C) \Rightarrow B = A + \beta(B-C)$$
$$A = A + 0(B-C)$$
$$¿\ C = A + \gamma(B-C)\ ?$$
$$C = A + \underbrace{(C-A)}_{= \frac{\beta}{\alpha}(B-C)}$$

Conclusão: A, B, C são colineares sse

AB, AC e BC são colineares (paralelos)

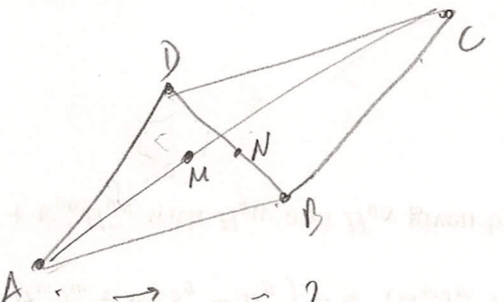


$$AB = (1, 2, -1)$$
$$AC = (-1, -2, 1) = -AB$$
$$BC = (-2, -4, 2) = -2AB$$

2b) $AB = (1, 1, 1)$

$AC = (0,$ X

4.



¿ $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$?

Não precisa.

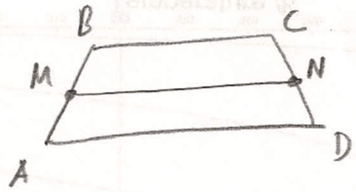
$$\boxed{\begin{aligned} AM + MC &= AB + BC \\ BN + ND &= BC - AB \end{aligned}}$$

MN ?

$$\begin{cases} AM = \frac{1}{2}(AB + BC) \\ BN = \frac{1}{2}(BC - AB) \end{cases}$$

$$MN = MA + AB + BN$$
$$= -\frac{1}{2}(AB + BC) + AB + \frac{1}{2}(BC - AB)$$

5.



$\overrightarrow{BC} = \alpha \overrightarrow{AD} \quad (\alpha > 0)$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$$
$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$
$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\underbrace{(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})}_{AB + BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2\alpha}\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\alpha + 1)\overrightarrow{AD} \quad \therefore \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$$

e $\boxed{\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\alpha \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

4ºL (4)

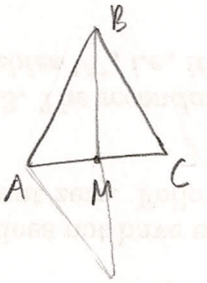
6a) $v \cdot u = x^2 - 4 + 9$

$\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$.

b) . —

---

7 a)



$\vec{AM} = \vec{MC}$

$\vec{AM} = \vec{BM} - \vec{BA} = \vec{BC} - \vec{BM}$

$\vec{AM} \cdot \vec{MB} = \|\vec{BM}\|^2 - \vec{BA} \cdot \vec{MB}$

$\therefore \vec{BA} + \vec{BC} = 2\vec{BM}$

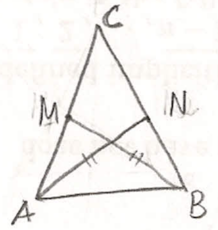
$\vec{AM} \cdot \vec{MB} = \|\frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})\|^2 - \frac{1}{2}\vec{BA} \cdot (\vec{BA} + \vec{BC})$

$= \frac{1}{4}\|BA\|^2 + \cancel{\frac{1}{2}\vec{BA} \cdot \vec{BC}} + \frac{1}{4}\underbrace{\|BC\|^2}_{\|BA\|^2} - \frac{1}{2}\|BA\|^2 - \cancel{\frac{1}{2}\vec{BA} \cdot \vec{BC}}$

$= \frac{1}{2}\|\vec{BA}\|^2 - \frac{1}{2}\|BA\|^2 = 0.$

---

b)



$\|AC\| \overset{?}{=} \|BC\|$

$AC = AM + MC$

$BC = BN + \underbrace{NC}_{AC - AN}$

$BC = BN + AC - AN$

basta:

$\|AM\| \overset{?}{=} \|BN\|$

$AM = BM - BA$

$BN = AN - AB$

$\|AM\|^2 = \|BM\|^2 + \cancel{\|BA\|^2} - BM \cdot BA$

$\|BN\|^2 \overset{hip.}{=} \|AN\|^2 + \cancel{\|AB\|^2} - AN \cdot AB$

$\therefore \Leftrightarrow BM \cdot BA \overset{?}{=} AN \cdot AB$

$AB = AC + CB$

$= AM + MC + CN + NB$

$= 2AM + 2CN$

$$BM \cdot (-\cancel{2}AM - \cancel{2}CN) \overset{?}{=} AN \cdot (\cancel{2}AM + \cancel{2}CN)$$

$$(BM + AN) \cdot \underbrace{AM}_{= \cancel{NM} - NA} \overset{?}{=} -(AN + BM) \cdot \underbrace{CN}_{= NB = MB - \cancel{MN}}$$

$$BM \cdot AN + \|AN\|^2 \overset{?}{=} AN \cdot MB$$

??

---

10 b)

$$A := \begin{bmatrix} u \times v & u & v \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$AX \overset{?}{=} w. \qquad |A| = vol.(u, v, u \times v) \neq 0.$$

10c)

$$u \times (u \times v) = a\,(u \times v) + b\,u + c\,v$$

$\cdot u$: $\quad 0 = b\,\|u\|^2 \;\therefore\; b = 0$

$\cdot\, u \times v$: $\quad 0 = a\,\|u \times v\|^2 \;\therefore\; a = 0$

4ªL ⑥

17 $\Pi_{(m,n)} : (m+n)x + (m-2n)y + (2m+n)z = 4m + 5n$

$P \in r \iff \begin{cases} a + b + 2c = 4 \\ a - 2b + c = 5 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right]$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 13/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right]$

$\iff \begin{cases} a = 13/3 - 5/3\, c \\ b = -1/3 - 1/3\, c \end{cases}$

desnecessário

Por outro lado,

$\Pi_{(m,n)} : (x + y + 2z)m + (x - 2y + 1)n = 4m + 5n.$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$ $m = 1,\ n = 0$

$m = 0,\ n = 1.$