Marcelo

MA-141 GEOMETRIA ANALÍTICA, 1º PERÍODO DE 2006

TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS

Vetores no plano e no espaço

Questão 1. Mostre que o segmento que une os pontos médios de 2 lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e é igual a sua metade.
livro

Questão 2. Seja o triângulo de vértices ABC, e pontos, M no lado BA, N no lado CA, de tal maneira que sejam verificadas as igualdades vetoriais: $\overrightarrow{BM} = u\ \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CN} = u\ \overrightarrow{CA}$, onde $0 < u < 1$, é um número real.

(a) Determine $\overrightarrow{MA}$ em função de $\overrightarrow{BA}$.

(b) Mostre que o segmento MN é paralelo ao lado BC.

Questão 3.

(a) Demonstre que se α e β são números reais tais que

$$\alpha(2,3) + \beta(3,2) = \vec{0},$$

então $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

(b) Qual a conclusão geométrica que podemos tirar do item acima?

Questão 4. Considere três vetores do espaço, $u = (1, 0 - 1)$, $v = (1, 1, 1)$ e $w = (x, y, z)$.

(a) Se $w = (-1, -5, -9)$ mostre que existem escalares a e b tais que $w = au + bv$.

(b) Ainda para $w = (-1, -5, -9)$, será que existem escalares a', b' tais que $(a', b') \neq (a, b)$ e $w = a'u + b'v$?

(b) Será que para todo w existem escalares a e b tais que $w = au + bv$, como no item anterior?

(d) Existe alguma relação entre as perguntas acima e o estudo de sisitemas?

Questão 5. Sejam a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 seis números reais quaisquer. Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Questão 6. (a) Determine o conjunto de todos os vetores do espaço que são paralelos ao vetor $(1, 1, 1)$.
(b) Descreva o conjunto de todos os vetores do espaço que são ortogonais ao vetor $(1, 0, -1)$.
(c) Qual o significado geométrico dos conjuntos encontrados nos itens (a) e (b)?

Questão 7. Dados os vetores $U = (0, 2, -2)$ e $V = (2, 2, 0)$ pede-se:

(a) Dois vetores unitários (norma 1) u e v de modo que u seja paralelo a U e v seja ortogonal a U e V;

(b) um terceiro vetor unitário w de modo que u, v e w sejam dois a dois ortogonais.

Questão 8. Mostre que as diagonais de um losango cortam-se mutuamente em seu ponto médio e que são ortogonais entre si.

Questão 9. Considere os pontos $A = (3, -2, 8)$, $B = (0, 0, 2)$ e $C = (-3, -5, 10)$.

(a) Usando vetores mostre que o triângulo de vértices A, B e C é retângulo.

(b) Determine a área desse triângulo. (Área do triângulo $= 1/2$ área do paralelogramo).

(c) Seja H o pé da altura do triângulo relativa ao vértice A. Determine o vetor $\overrightarrow{BH}$. (Observar que $\overrightarrow{BH}$ é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{BA}$ sobre $\overrightarrow{BC}$.)

(d) Dê as coordenadas do ponto H.

Questão 10. Decompor o vetor $w = (-1,-3,-2)$ como soma de dois vetores $w = u + v$, onde u é paralelo ao vetor $(0,1,3)$ e v é ortogonal a $(0,1,3)$.

Questão 11. Sejam u, v e w três vetores. Sabendo-se que u é ortogonal a $v - w$ e v é ortogonal a $w - u$, verifique que w é ortogonal a $u - v$.

Questão 12. Seja $v \neq 0$ um vetor do $\mathbb{R}^3$ e sejam α, β, e γ os ângulos que v vaz com os eixos coordenados. Mostre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. (Sugestão, calcular os cossenos fazendo o produto escalar com os vetores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ respectivamente.)

Questão 13. A área do triângulo ABC é $\sqrt{6}$. Sabendo-se que $A = (2,1,0)$, $B = (-1,2,1)$ e que o vértice C está no eixo Y, encontre as coordenadas de C.

Questão 14. Encontre um vetor u que seja ortogonal aos vetores $(2,3,-1)$ e $(2,-4,6)$ tal que $\| u \| = 3\sqrt{3}$.

Questão 15. Dados os pontos $A = (2,3,0)$, $B = (4,0,1)$ e $C = (0,1,2)$ no $\mathbb{R}^3$ determine:

(a) O comprimento do lado AB.

(b) A medida do ângulo entre os lados BA e BC.

(c) A área do triângulo ABC.

(d) O comprimento da altura do triângulo ABC relativa ao vértice A.

(e) As coordenadas do ponto no lado AC por onde passa a perpendicular a esse lado que contém o ponto B.

(f) O volume do tetraedro $OABC$ ($0 = (0,0,0)$)(Observação: o volume do tetraedro é igual a $1/6$ do volume do paralelepípedo.)

(g) Desenhe o triângulo ABC no espaço $\mathbb{R}^3$.

Questão 16. Dados os vetores $u = (1,2,1)$ e $v = (0,a,b)$, determine a e b de modo que o vetor $w = u \wedge v$ verifique $\| w \| = 11$ e que os ângulos agudos formados entre w e os eixos coordenados X e Y sejam iguais.

Questão 17. Sejam $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (0,2,1)$, $v_3 = (2,-2,-3)$ e $v_4 = (1,2,1)$, vetores do $\mathbb{R}^3$.

(a) Verificar que v_1, v_2 e v_3 são coplanares.

(b) Verificar que v_1, v_2, v_3 formam uma base de $\mathbb{R}^3$ e represente v_3 como combinação linear de v_1, v_2, v_3.

Questão 18. Dado o vetor $v = (0,1,2)$, determine um vetor w ortogonal ao eixo X tal que $|v \wedge w| = 12$ e $< v, w >= 4$.

Questão 19. Encontre um vetor u que seja ortogonal aos vetores $(2,3,-1)$ e $(2,-4,6)$ tal que $\| u \| = 3\sqrt{3}$.

Questão 20. Se u, v e w são três vetores linearmente dependentes do $\mathbb{R}^3$, mostre que $< u \wedge v, w >= 0$.

Questão 21. Encontre a equação de <u>uma</u> reta mediatriz do segmento de extremos $A = (1,1,1)$ e $B = (3,3,3)$.

Questão 22. Considere os pontos $A = (4,3,-2)$, $B = (5,5,-1)$, $C = (6,4,-3)$ e $D = (7,6,0)$. Pede-se:

(a) A equação do plano π que passa por A, B e C. Mostre também que D não está em π.

(b) As equações paramétricas da reta r que passa por D e é perpendicular a π (item (a)).

(c) O ponto de interseção entre a reta r (item (b)) e o plano π.

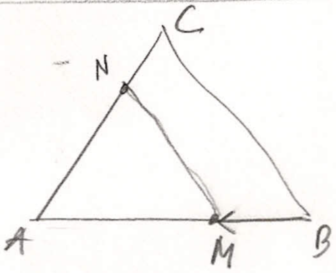
(d) A distância do ponto D ao plano π.

(e) A área do triângulo de vértices A, B e C (Área do triângulo $= 1/2$ área do paralelogramo).

(f) O volume do tetraedro de vértices A, B, C e D (Volume do tetraedro $= 1/6$ volume do paralelepípedo).

(g) A altura do tetraedro $ABCD$.

(2)



$BM = u\,BA$

a) $\vec{BA} = \vec{BM} + \vec{MA} = u\,\vec{BA} + \vec{MA}$ $\therefore$ $\boxed{\vec{MA} = (1-u)\,\vec{BA}}$

b) $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN}$

$\vec{AC} = \vec{AN} + \vec{NC} = \vec{AN} - \vec{CN} = \vec{AN} - u\,\vec{CA}$

$\therefore$ $\boxed{\vec{AN} = (1-u)\,\vec{AC}}$

$\therefore$ $\vec{MN} = (1-u)\,\vec{BA} + (1-u)\,\vec{AC}$

$= (1-u)\,(\vec{BA} + \vec{AC}) = (1-u)\,\vec{BC}$

$\boxed{\vec{MN} = (1-u)\,\vec{BC}}$

---

(3)

a) $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$ sist. linear 2×2

det $\neq 0$ $\therefore \alpha = \beta = 0$

b) Os vetores não são paralelos.

---

(4) a) $\left.\begin{array}{l} a + b = -1 \\ b = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = 4}$

$-a + b = -9$

b) Não.

c) $\left.\begin{array}{l} a + b = x \\ b = y \end{array}\right\} \Rightarrow a = x - y$

$-a + b = z$ $\Big\} \Rightarrow -x + y + y = z$

$\therefore$ $\boxed{z = 2y - x}$

d) Considere a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 + L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & x+z \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 - L_2 \to L_1]{-2L_2 + L_3 \to L_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & x+z-2y \end{array}\right]$$

$\boxed{\begin{cases} a = x - y \\ b = y \\ x + z - 2y = 0 \end{cases}}$

⑤ $|U\cdot V| = \|U\|\,\|V\|\,\underbrace{|\cos(U,V)|}_{\leq 1}$

⑥ a) $v=(x,y,z) = \alpha(1,1,1)$

$x=\alpha$
$y=\alpha \quad \therefore \quad x=y=z$
$z=\alpha$

Reciprocamente, $x=y=z \Rightarrow v = x(1,1,1)$.

b) $x - z = 0$ ou $\boxed{x=z}$

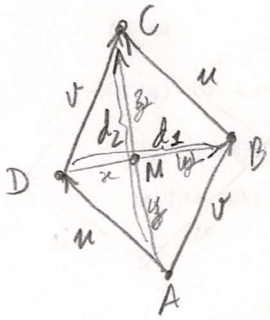
c) Reta $\parallel (1,1,1)$

Plano com vetor normal $(1,0,-1)$

⑦ a) $u = \|U\|^{-1}U$, $\quad v = \|U\times V\|^{-1}(U\times V)$.

b) $w = u\times v$.

⑧



$\|v\| = \|u\|$

$$\begin{cases} -u+v = d_1 \\ u+v = d_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d_1\cdot d_2 &= (v-u)\cdot(u+v) \\ &= v\cdot\cancel{u} - u\cdot u + v\cdot v - \cancel{u\cdot v} \\ &= \|v\|^2 - \|u\|^2 = 0. \end{aligned}}$$

~~AM + MB = v~~ ①
~~AM + MD = u~~ ②
~~BM + MC = u~~ ③
~~DM + MC = v~~ ④

~~①+④: AC + DB = 2v~~

~~① ⇒ AM = v − MB~~
~~= −u + CA~~

~~2 AM + (MB + MD) = AC~~
~~(BM + DM) + 2MC = AC~~
~~AM + MC = AC~~

Cont. 8

$x \equiv x/l^2$, etc.

$$\begin{cases} \|BM\|^2 + \|MC\|^2 = \|u\|^2 \\ \|BM\|^2 + \|MA\|^2 = \|v\|^2 \\ \|MB\|^2 + \|MA\|^2 = \|u\|^2 \\ \|MD\|^2 + \|MC\|^2 = \|u\|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = l^2 \\ x^2+z^2 = l^2 \\ w^2+z^2 = l^2 \\ w^2+y^2 = l^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ x+z = 1 \\ w+z = 1 \\ w+y = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-L_2+L_4 \to L_4]{-L_2+L_1 \to L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3+L_2 \to L_2 \\ -L_3+L_4 \to L_4}]{-L_3+L_1 \to L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x - w = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = w}$

$y + w = 1 \Leftrightarrow \boxed{y = 1 - w}$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{y = z}$

$z + w = 1 \Leftrightarrow \boxed{z = 1 - w}$

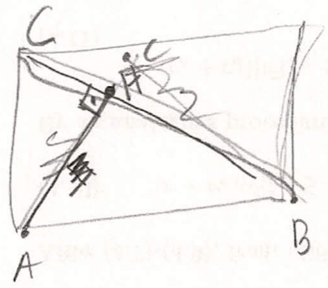
$w + 1 - w = 1$ ✓

$w + 1 - w = 1$ ✓

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

9



(a) $\vec{AB} = (-3, 2, -6)$

$\vec{AC} = (-6, -3, 2)$

$\vec{BC} = (-3, -5, 8)$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 18 - 6 - 12 = 0$ ✓

(b) ...

(c) $\vec{BH} = \text{proj}_{\vec{BC}} \vec{BA} = \dfrac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2} \vec{BC}$

$BH = V_1 + V_2$

$= \alpha \vec{BC} + V_2$

$BH \cdot BC = \alpha \|BC\|^2$

(d) $\vec{BH} = \vec{OH} - \vec{OB}$

$\vec{OH} = \vec{BH} + \vec{OB}$ ...

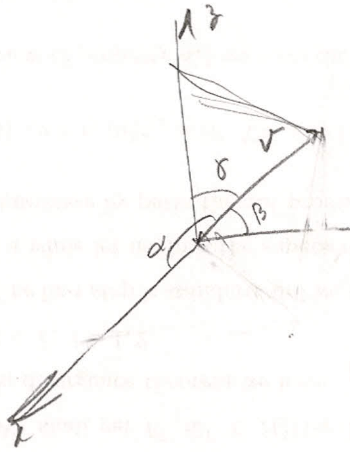
3º L (4)

(11)

$$\begin{cases} u \cdot (v - w) = 0 \Leftrightarrow u \cdot v = u \cdot w \\ v \cdot (w - u) = 0 \Leftrightarrow v \cdot w = v \cdot u \Rightarrow u \cdot w = w \cdot v \end{cases}$$

$$w \cdot (u - v) \Leftrightarrow w \cdot u = w \cdot v$$

(12)



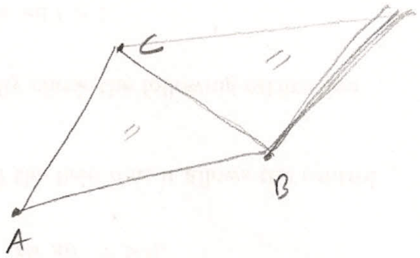
$\|v\| = 1$ spg

$$(v \cdot i)^2 + (v \cdot j)^2 + (v \cdot k)^2$$

$$v = a i + b j + c k \qquad v = (v \cdot i) i + (v \cdot j) j + (v \cdot k) k$$

$$v \cdot i = a \ \ldots \qquad 1 = \|v\|^2 = (v \cdot i)^2 + (v \cdot j)^2 + (v \cdot k)^2$$

(13) $C = (0, c, 0)$



$$\sqrt{6} = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \times \vec{AC} \|$$

$$\vec{AB} = (-3, 1, 1)$$

$$\vec{AC} = (-2, c-1, 0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (1 - c, -2, 5 - 3c)$$

$$\| AB \times AC \| = \sqrt{1^2 - 2c + c^2 + 4 + 25 - 30c + 9c^2}$$

$$30 - 32c + 10c^2$$

$$24 = \frac{1}{4}(30 - 32c + 10c^2)$$

$$12 = 15 - 16c + 5c^2$$

$$5c^2 - 16c + 3 = 0$$

$$\Delta = 256 - 60 = 196 = 14^2$$

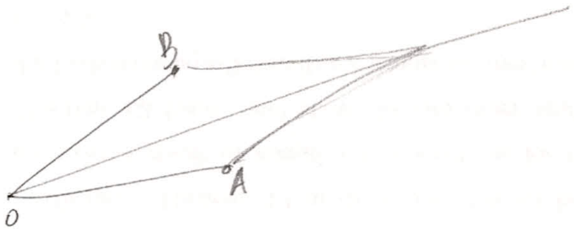
$$c = \frac{16 \pm 14}{10} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{5} \end{cases}.$$

20

$$au + bv + cw = 0$$

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} = 0 \text{ sse}$$

21



$\overrightarrow{O(A+B)}$ é um vetor diretor

e $A+B \in$ reta.