Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Professor: Dr. Marcelo Martins dos Santos
MA 720 - Análise no $\mathbb{R}^n$ - Turma A

Lista de exercícios 2 - Análise no $\mathbb{R}^n$

1. Seja $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ uma aplicação bilinear. Mostre que existe uma constante positiva C tal que

$$\|B(x,y)\| \leq C\,\|x\|\,\|y\|$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Use esse fato para mostrar que B é diferenciável e que, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$

$$B'(x,y).(u,v) = B(u,y) + B(x,v).$$

2. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $c \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe $C^1(A)$.

(a) Demonstre que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x_k - c\| \leq \delta$, $k = 1, 2$, então

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f'(c)(x_1 - x_2)\| \leq \epsilon\,\|x_1 - x_2\|\,.$$

(b) Considere que $n \leq m$. Mostre que, se a derivada $f'(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetiva, então existe $\delta > 0$ tal que a restrição h de f ao conjunto $B(c,\delta)$ é uma aplicação injetiva.

(c) Seja $g : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável com as seguintes propriedades: $g'(c) = 0$ e $\det(A) \neq 0$, onde $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ e

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(c)$$

Use os itens anteriores para mostrar que existe uma vizinhança V de c tal que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in V$ diferente de c.

3. Seja $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(u,v,w,x,y) = (uy + vx + w + x^2, uvw + x + y + 1).$$

Mostre existe uma aplicação $\xi : W \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^1(W)$ definida em um aberto $W \subset \mathbb{R}^2$ tal que $f(u,v,w,\xi_1(u,v,w),\xi_2(u,v,w)) = 0$ para todo $(u,v,w) \in W$, onde ξ_1 e ξ_2 são as funções coordenadas de ξ, e $\xi(2,1,0) = (-1,0)$. Além disso, mostre que

$$\xi'(2,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & -1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \langle x, y \rangle.$$

(a) Calcule os pontos críticos de f com a restrição

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1.$$

(b) Use o item anterior para provar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.