MA311-2007-1$^{\text{O}}$ Semestre – Gabarito – Prova 3 – Manhã

Questão 1

A função sen(x) pode ser expressa na sua série de Taylor (série de Maclaurin),

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} ,$$

que converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} ,$$

que tambén converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Já que o intervalo de integração está contido no interior do intervalo de convergência da série (série de potências), podemos integrar termo a termo e fica

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} x^{2n+1} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} , \end{aligned}$$

Escrevendo a série por extenso, fica

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \times 3!} + \frac{1}{5 \times 5!} - \frac{1}{7 \times 7!} + \dots .$$

Pontos: 0,5 - série do seno; 0,5 - série de sen$(x)/x$; 0,9 - a integração; 0,1 - por mencionar as condições de convergência.

Questão 2

Consideramos a equação diferencial: $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, onde $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x$ e $R(x) = x^2$:

$$(x-1)y'' + xy' + x^2y = 0$$

- Um ponto x_0 no qual $P(x_0) \neq 0$ é chamado ponto ordinário
(caso em que os coeficientes sao polinômios).

  Assim, para $x_0 = 0$, $P(x_0) = P(0) = -1 \neq 0$, logo, $x_0 = 0$ é um ponto ordinário.

  (**Até aqui, 0,6 pontos.**)

- Escrevemos a equação diferencial na forma:

$$y'' + \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{x^2}{x-1}}_{q(x)} y = 0.$$

  Como $p(x)$ e $q(x)$ são quocientes de dois polinômios e $\lim_{x\to 0} p(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} q(x) = 0$ então, p e q são analíticas. Assim, temos um resultado que garante que o raio de convergência das soluções em série da equação diferencial dada são pelo menos, tão grande quanto o menor entre os raios de convergência das séries de p e q. (**mais 0,8 até aqui**)

- Calculando o raio de convergência de p e de q;

  1ª o raio de convergência da série de potência de $p(x) = Q(x)/P(x)$ em torno do ponto $x_0 = 0$ é exatamente a distância entre $x_0 = 0$ à raiz mais próxima de P. Como a única raiz de P é $x = 1$, então o raio de convergência de p é 1. Analogamente, o raio de convergência da série de q em torno do ponto $x_0 = 0$ é 1.

  ou

  2ª $p(x) = \dfrac{x}{x-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$, pelo Teste da Razão, esta série converge quando: $\left|\dfrac{x^{n+2}}{x^{n+1}}\right| = |x| < 1$, ou seja, o raio de convergência da série é 1;

  $q(x) = \dfrac{x^2}{x-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$, pelo Teste da Razão, esta série converge quando: $\left|\dfrac{x^{n+3}}{x^{n+2}}\right| = |x| < 1$, ou seja, o raio de convergência da série é 1;

  Logo o raio de convergência de qualquer solução da equação diferencial dada é pelo menos 1.

  (**Mais 0,6 pontos até aqui.**)

Questão 3.

(Para aplicar o Teorema de Fourier, podemos estender f para uma função que seja par, periódica com período $2 \times 30 = 60$, contínua por partes e com derivada também contínua por partes (seccionalmente contínua), dada por:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in (0,30) \\ f(-x), & \text{se } x \in (-30,0) \\ f_p(x+60) = f_p(x), & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Assim podemos aplicar o Teorema de Fourier para $f_p(x)$ e escrever

$$\frac{f_p(x+) + f_p(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{30}),$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$, onde $f_p(x\pm) := \lim_{h\to 0\pm} f_p(x+h)$ (limites laterais de f_p em x) e

$$a_n = \frac{2}{30}\int_0^{30} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{30})\, dx \quad n = 0,1,2,\cdots .)$$

Temos que a série de Fourier em cossenos de f com período 60 é dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{30})$$

onde

$$a_n = \frac{2}{30}\int_0^{30} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{30})\, dx \quad n = 0,1,2,\cdots .$$

Logo, temos que

$$a_0 = \frac{1}{15}\int_{15}^{30} f(x)\cos(\frac{0\pi x}{30})\, dx = \frac{1}{15}\int_{15}^{30} 15\, dx = 15\,.$$

(1,2 pontos até aqui.)

e, se $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{15}\int_{15}^{30} 15\cos(\tfrac{n\pi x}{30})\, dx = \int_{15}^{30} \cos(\tfrac{n\pi x}{30})\, dx \\ &= \tfrac{30}{n\pi}\operatorname{sen}(\tfrac{n\pi x}{30})\Big|_{x=15}^{x=30} = \tfrac{30}{n\pi}(\operatorname{sen}(n\pi) - \sin(\tfrac{n\pi}{2})) \\ &= -\tfrac{30}{n\pi}\operatorname{sen}(\tfrac{n\pi}{2})\,. \end{aligned}$$

Logo a série de Fourier pedida é:

$$\frac{15}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{n\pi} \sin(\frac{n\pi}{2}) \cos(\frac{n\pi x}{30}).$$

2,0 pontos até aqui.

Questão 4

Separação de variáveis: $u(x,t) = X(x)T(t)$; Derivando e substituindo na equação, temos:

$$\begin{aligned} u_{xx} = X''(x)T(t), &\quad u_t = X(x)T'(t) \\ \pi^2 X(x)T'(t) = X''(x)T(t), &\quad \pi^2 \tfrac{T'(t)}{T(t)} = \tfrac{X''(x)}{X(x)}, \end{aligned}$$

logo, $\pi^2 \frac{T'(t)}{T(t)}$ e $\frac{X''(x)}{X(x)}$ são uma função constante (já que x e t são variáveis independentes). Denotando essa constante por $-\lambda$ segue-se que

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X \\ T' = \frac{-\lambda}{\pi^2} T \end{cases}$$

0,5 pontos até aqui

Impondo a condição de contorno $u(0,t) = u_x(2,t) = 0$, temos $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ e $u_x(2,t) = X'(2)T(t) = 0$; como queremos $u \neq 0$, vem que $X(0) = X'(2) = 0$, ou seja, temos o problema de autovalores para X:

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 < x < 2 \\ X(0) = X'(2) = 0. \end{cases}$$

Mais 0,5 pontos até aqui.

Caso $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} X'' = 0, &\quad X(x) = c_1 x + c_2 \\ X(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow &\quad X(x) = c_1 x \\ &\quad X'(2) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ \therefore X(x) \equiv 0 : &\quad \text{Não interessa.} \end{aligned}$$

Caso $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} (X'' + \lambda X = 0; &\quad \text{eq. caract.: } r^2 + \lambda = 0; \text{ raízes: } r = \pm\sqrt{-\lambda}.) \\ X(x) = c_1 \mathrm{e}^{\mu x} + c_2 \mathrm{e}^{-\mu x}, &\quad \text{onde } \mu := \sqrt{-\lambda}; \\ X(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow &\quad X(x) = c_1(\mathrm{e}^{\mu x} - \mathrm{e}^{-\mu x}) \\ &\quad X'(2) = 0 \Rightarrow c_1\mu(\mathrm{e}^{2\mu} + \mathrm{e}^{-2\mu}) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ \therefore X(x) \equiv 0 : &\quad \text{Não interessa.} \end{aligned}$$

Caso $\lambda > 0$:

$$\begin{array}{rl} & (X'' + \lambda X = 0; \;\; \text{eq. caract.: } r^2 + \lambda = 0; \;\; \text{raízes: } r = \pm i\sqrt{\lambda}, \;\; i = \sqrt{-1}.) \\ X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \operatorname{sen} \mu x, & \text{onde } \mu := \sqrt{\lambda}; \\ X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow & X(x) = c_2 \operatorname{sen} \mu x \\ & X'(2) = 0 \Rightarrow c_2 \mu \cos 2\mu = 0 \Rightarrow 2\mu = n\frac{\pi}{2} \end{array}$$

para qualquer n número ímpar.

Mais 0,5 pontos até aqui.

Tomando por exemplo $n = 1$ (foi pedida somente uma solução da equação satisfazendo as condições de contorno) e $c_2 = 1$, temos $\mu = \frac{\pi}{4}$, $\lambda = \frac{\pi^2}{16}$, $X(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} x$ e, retornando a equação para T ($T' = \frac{-\lambda}{\pi^2} T$), temos que $T(t) = \mathrm{e}^{\frac{-\lambda}{\pi^2} t} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{16}}$ é uma solução, logo,

$$\boxed{u(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{16}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} x}$$

é uma solução do problema pedido.

Mais 0,5 pontos até aqui.

Questão 5

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$$

$$x_0 = 0, \;\; P(x) = x, \;\; Q(x) = 1 - x, \;\; R(x) = \lambda,$$

$$\lim_{x \to 0} x \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \to 0} x \frac{1-x}{x} = \lim_{x \to 0} (1 - x) = 1 = -p_0,$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \to 0} x^2 \frac{\lambda}{x} = 0 = q_0,$$

0,25 pontos até aqui ———————————

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1},$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-2},$$

$$0 = xy'' + (1-x)y' + \lambda y =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)x^{n+r-1}$$

$$+\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Equação indicial: $r(r-1) + r = 0 \ \rightarrow r^2 = 0 \ \rightarrow \ r_1 = r_2 = 0.$
Mais 0,25 pontos até aqui ———————————
Relação de recorrência : $a_{n+1} = \frac{(n-\lambda)}{(n+1)^2} a_n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$
Mais 0,5 pontos até aqui ———————————

$$n = 0 \rightarrow a_1 = \frac{-\lambda}{1^2} a_0,$$

$$n = 1 \rightarrow a_2 = \frac{(1-\lambda)}{(1+1)^2} a_1 = \frac{(1-\lambda)(-\lambda)}{1^2 \cdot 2^2} a_0 = \frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2} a_0,$$

$$n = 2 \rightarrow a_3 = \frac{(2-\lambda)}{3^2} a_2 = \frac{(2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)}{(3!)^2} a_0,$$

$$n = 3 \rightarrow a_4 = \frac{(3-\lambda)}{4^2} a_4 = \frac{(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)}{(4!)^2} a_0,$$

$$n = 4 \rightarrow a_5 = \frac{(4-\lambda)}{5^2} a_4 = \frac{(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)}{(5!)^2} a_0,$$

$$a_n = \frac{(-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)\cdots(n-1-\lambda)}{(n!)^2} a_0,$$

$$y_1(x) = 1 + \frac{-\lambda}{(1!)^2} x + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2} x^2 + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)}{(3!)^2} x^3$$

$$+ \frac{(-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)}{(4!)^2} x^4 + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)}{(5!)^2} x^5 \cdots$$

Mais 0,7 pontos até aqui ———————————

$$\lambda = 2: \ y_1(x) = 1 + \frac{-2}{1} x + \frac{-2(1-2)}{2^2} x^2 = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}.$$

Mais 0,3 pontos até aqui ———————————