MA311-2007-1º Semestre – Gabarito – Prova 2 – Manhã

Questão 1

a1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$

Para $n \geq 1$ temos que $\dfrac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}} > 0$ *(até aqui **0.1**)*

Consideramos os termos dominantes do numerador e do denominador:

$b_n = \dfrac{n}{n^{7/3}} = \dfrac{1}{n^{4/3}}$. Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{4/3}}$ é

uma série–p com $p = 4/3 > 1$. Logo, é convergente. *(mais **0.3** até aqui)*

Analisamos o limite a seguir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}}{\dfrac{1}{n^{4/3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/3}+5n^{4/3}}{\sqrt[3]{n^7+n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^5}}} = \frac{1+0}{\sqrt[3]{1+0}} = 1 > 0.$$ *(mais **0.2** até aqui)*

Como $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1 > 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série convergente, segue do Teste da Comparação por Limite que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. *(mais **0.2** até aqui)*

a2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n}{1+8n}\right)^n$

Consideramos o limite a seguir:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{3n}{1+8n}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3n}{1+8n}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3n}{1+8n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3}{\frac{1}{n}+8}\right| =$$

$\dfrac{3}{8} < 1$ *(até aqui **0,4**)*

Desde que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\dfrac{3n}{1+8n}\right)^n\right|} = \dfrac{3}{8} < 1$, o Teste da Raiz garante que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n}{1+8n}\right)^n$ é convergente. *(mais **0,4** até aqui)* b1) Queremos mostrar que $\{a_n\}$ é crescente, ou seja, $a_n < a_{n+1}$ para todo n.

- $n = 1$

$$6 < 6 + \sqrt[3]{6}, \text{ já que } \sqrt[3]{6} > 0 \Rightarrow$$
$$\underbrace{\sqrt[3]{6}}_{a_1} < \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}}_{a_2} \Rightarrow$$
$$a_1 < a_2$$

- Suponhamos que para $n = k$ vale $a_k < a_{k+1}$. Assim,

$$6 + a_k < 6 + a_{k+1} \Rightarrow$$
$$\underbrace{\sqrt[3]{6 + a_k}}_{a_{k+1}} < \underbrace{\sqrt[3]{6 + a_{k+1}}}_{a_{k+2}} \Rightarrow$$
$$a_{k+1} < a_{k+2},$$

ou seja, com a hipótese de que $a_n < a_{n+1}$ vale para $n = k$, concluimos que $a_n < a_{n+1}$ para $n = k + 1$. Segue do Princípio de Indução que $a_n < a_{n+1}$ vale para todo $n \geq 1$. E assim a sequência é crescente. ***(0,2** até aqui)*

b2) Queremos mostrar que $a_n < 2$

- $n = 1$ $a_1 = \sqrt[3]{6} < 2$
- Suponhamos que para $n = k$ vale $a_k < 2$. Assim,

$$6 + a_k < 6 + 2 = 8 \Rightarrow$$
$$\underbrace{\sqrt[3]{6 + a_k}}_{a_{k+1}} < \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow$$
$$a_{k+1} < 2,$$

ou seja, com a hipótese de que $a_n < 2$ vale para $n = k$, concluimos que $a_n < 2$ para $n = k + 1$. Segue do Princípio de Indução que $a_n < 2$ vale para todo $n \geq 1$. Logo, a sequência $\{a_n\}$ é superiormente limitada. *(mais **0,2** até aqui)*

b3) Pelos itens anteriores temos que a sequência $\{a_n\}$ é crescente e superiormente limitada. Segue do Teorema da Sequência Monótona que a sequência $\{a_n\}$ é convergente, ou seja, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.*(mais **0,2** até aqui)*

b4) Temos que $a_n = \sqrt[3]{6 + a_{n-1}} \Rightarrow a_n^3 = 6 + a_{n-1}$. Quando $n \to \infty$, $a^3 = 6 + a \Rightarrow a^3 - a - 6 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a^2 + 2a + 3) = 0$ e as raizes são $a = 2$, $a = -1 + \frac{3}{2}i$ e $a = -1 - \frac{3}{2}i$. Logo, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.*(mais **0,2** até aqui)*

Questão 2

2a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Polinômio característico e autovalores (0.5 pts) $(\lambda - 4)^2 \lambda$, autovalores $\lambda = 4$ (multiplicidade 2) e $\lambda = 0$ (multiplicidade 1).
- Autovetores (0.5 pts) correspondente a $\lambda = 0 \rightsquigarrow (1, 1, 0)$ (como vetor coluna), $\lambda = 4 \rightsquigarrow (0, 1, 1)$ (como vetor coluna) (não temos 3 autovetores independentes).
- Solução geral: (0,5 pts) é da forma $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \left(te^{4t}\xi + e^{4t}\eta \right)$
- Encontrar ξ e η (0,5 pontos): $(A - 4\mathbf{1})\xi = 0, (A - 4\mathbf{1})\eta = \xi$. Fica então $\xi = (0, 1, 1)$ e $\eta = (1/2, 0, 1/2)$ (multiplicar *simultaneamente* ξ e η por uma constante também está certo; por exemplo $\xi = (0, 2, 2), \eta = (1, 0, 1)$).

2b)

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \left(te^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right),$$

então

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

Chegamos ao sistema de equações

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & + & & + & \frac{1}{2}c_3 & = & 1 \\ c_1 & + & c_2 & & & = & 2 \\ & & c_2 & + & \frac{1}{2}c_3 & = & -1 \end{array}$$

Cuja solução é $c_1 = 2, c_2 = 0, c_3 = -2$, a solução é

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2te^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^{4t} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 1 + 2t \end{pmatrix}$$

(0,2 colocar as equações certas; 0,2, a solução certa)

Questão 3.

a) Note que $\Psi(0) = \text{Id}$, logo $\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}\cos t\\ \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\,t\end{pmatrix}$ – uma espiral emanando da origem e passando pelo ponto $(1,0)$ quando $t = 0$. (0,3 pontos até aqui)

$\mathbf{x}'(0) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, logo a espiral evolui no sentido anti-horário. (0,4 pontos até aqui)

b) Uma solução particular:

$$\mathbf{x}_P = \Psi(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \int \Psi(t)^{-1}\mathbf{g}(t)dt$$

(0,5 pontos até aqui)

$$\begin{aligned}
\Psi(t)^{-1} &= \underbrace{\frac{1}{\det\Psi(t)}}_{\mathrm{e}^{2t}}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\cos 2t & \mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\,2t\\ -\mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\,2t & \mathrm{e}^t\cos 2t\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}\cos 2t & \mathrm{sen}\,2t\\ -\mathrm{sen}\,2t & \cos 2t\end{pmatrix}\\
\therefore\ \mathbf{u}(t) &= \int \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}\cos 2t & \mathrm{sen}\,2t\\ -\mathrm{sen}\,2t & \cos 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\,\mathrm{e}^t\\ 0\end{pmatrix}dt\\
&= \int \begin{pmatrix}2\cos 2t\\ -2\,\mathrm{sen}\,2t\end{pmatrix}dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix}\mathrm{sen}\,2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}}$$

(1,0 ponto até aqui)

$$\therefore\ \mathbf{x}_P = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\cos 2t & -\mathrm{sen}\,2t\\ \mathrm{sen}\,2t & \cos 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{sen}\,2t\\ \cos 2t\end{pmatrix} = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}_P = \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{e}^t\end{pmatrix}}$$

(1,5 pontos até aqui)

Logo, a solução (geral) é

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)c + \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{e}^t\end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

ou

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \mathrm{e}^t \cos 2t - c_2 \mathrm{e}^t \operatorname{sen} 2t \\ x_2 = c_1 \mathrm{e}^t \operatorname{sen} 2t + c_2 \mathrm{e}^t \cos 2t + \mathrm{e}^t \end{cases}$$

(2,0 pontos até aqui)

Questão 4

Em termos matriciais, o sistema dado se escreve

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Cálculo dos autovalores $\mu = \pm \sqrt[2]{-1} \equiv \pm i$ da matriz $\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$. (0,4 pontos)
Logo a solucão geral é da forma (ou outra justificativa válida para as afirmações que se seguem):
$x(t) = e^{\mu t}(a_1 \cos t + a_2 \sin t)$ e $y(t) = e^{\mu t}(b_1 \cos t + b_2 \sin t)$. (mais 0,5 pontos)

$(0,0)$ é um ponto de espiral. (mais 0,5 pontos)
Se $\mu < 0$, $(0,0)$ é assintoticamente estável. (mais 0,5 pontos)
Se $\mu > 0$, $(0,0)$ é instável. (mais 0,5 pontos)

Questão 5

a) Olhando a tabela, vemos que

$$\frac{1}{(s^2+9)^2} = \frac{1}{(s^2+3^2)^2} = \pounds\left\{\frac{\sin 3t}{3}\right\}.\pounds\left\{\frac{\sin 3t}{3}\right\}.$$

(vale 0,25 até aqui)

Pelo teorema de convolução temos:

$$\begin{aligned} \pounds^{-1}\left\{\tfrac{1}{(s^2+3^2)^2}\right\} &= \tfrac{1}{9}\int_0^t \sin 3(t-\lambda)\sin 3\lambda d\lambda \\ &= \tfrac{1}{9}\int_0^t \tfrac{\cos(6\lambda-3t)-\cos 3t}{2} d\lambda \\ &= \tfrac{1}{18}\left[\tfrac{\sin(6\lambda-3t)}{6} - \lambda\cos 3t\right]_0^t \\ &= \tfrac{1}{18}\left(\tfrac{\sin 3t}{3} - t\cos 3t\right). \end{aligned}$$

(vale 1,0 até aqui)

b) Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação dada, temos:

$$\begin{aligned} s^2\pounds\{y\} + 4s\pounds\{y\} + 13\pounds\{y\} &= \pounds\{y\}\left(s^2+4s+13\right) \\ &= \tfrac{1}{(s+2)^2+3^2} + 3e^0 \end{aligned}$$

(vale 0,4 até aqui)

então

$$\pounds\{y\} = \frac{3}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{[(s+2)^2+3^2]^2}.$$

Sabemos que $\pounds^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right\} = e^{-2t}.\sin 3t = 0$, pois provamos que $e^{ct} = \pounds^{-1}\{F(s-c)\}$.

(vale 1,0 até aqui)

Pela parte a) temos que $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+2)^2+3^2]^2}\right\} = = \frac{1}{18}(\frac{\sin 3t}{3} - t\cos 3t)$. Logo a solução do nosso p.v.i. é:

$$\boxed{y(t) = e^{-2t}\sin 3t + \tfrac{e^{-2t}(\sin 3t - 3t\cos 3t)}{54}}.$$

(vale 1,4 até aqui).