MA311-2007-1$^{\text{o}}$ Semestre – Gabarito – Prova 1 – Manhã

Questão 1

$$\mu = e^{-4x},$$

$\boxed{\textbf{0,5 pontos até aqui}}$

$$y = \frac{\int e^{-4x}e^{3x}\cos x dx + C}{e^{-4x}} = e^{4x}\left(\int e^{-x}\cos x dx + C\right)$$

$$= \frac{e^{3x}}{2}(\sin x - \cos x) + Ce^{4x}.$$

$\boxed{\textbf{Mais 1,0 ponto até aqui}}$

$$y(0) = 1 \implies -1/2 + C = 1 \implies C = 3/2.$$

$\boxed{\textbf{Mais 0,5 pontos até aqui}}$

Resposta:

$$y = \frac{e^{3x}\sin x}{2} - \frac{e^{3x}\cos x}{2} + \frac{3e^{4x}}{2}.$$

Questão 2

Consideramos $M(x, y) = x \operatorname{sen} y$ e N(x,y)=$(x^2 + 1)\cos y$.

$$M_y = x\cos y \quad \text{e} \quad N_x = 2x\cos y,$$

logo, a equação não é exata. $\boxed{\textbf{0,25 pontos até aqui}}$

Vemos que de fato $\mu(y) = \operatorname{sen} y$ é um fator integrante pois:

$$\mu(y)(x \operatorname{sen} y)dx + \mu(y)((x^2 + 1)\cos y)dy = (x \operatorname{sen}^2 y)dx + +((x^2 + 1)\operatorname{sen} y \cos y)dy$$

é exata já que

$$\frac{\partial((x \operatorname{sen}^2 y))}{\partial y} = 2x \operatorname{sen} y \cos y = \frac{\partial((x^2 + 1)\operatorname{sen} y \cos y))}{\partial x}.$$

$\boxed{\textbf{Mais 0,25 pontos até aqui}}$

Logo sabemos que existe $\psi(x,y)$ tal que $\psi_x = x\,\mathrm{sen}^2\,y$ e $\psi_y = (x^2+1)\,\mathrm{sen}\,y\cos y$. Logo $\psi(x,y) = \int x\,\mathrm{sen}^2\,y\ dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{sen}^2\,y + \phi(y)$. Logo $\psi_y = x^2\,\mathrm{sen}\,y\cos y + \phi'(y)$. Então $(x^2+1)\,\mathrm{sen}\,y\cos y = x^2\,\mathrm{sen}\,y\cos y + \phi'(y)$. Logo $\phi'(y) = \mathrm{sen}\,y\cos y$ então $\phi(y) = \frac{\mathrm{sen}^2\,y}{2} + C$. Deste modo a solução geral do p.v.i. é:

$$\psi(x,y) = \frac{x^2\,\mathrm{sen}^2\,y}{2} + \frac{\mathrm{sen}^2\,y}{2} = C\,.$$

Mais 1,0 ponto até aqui

Mas $y(1) = \frac{\pi}{2}$ então $\frac{1\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\mathrm{sen}^2\,\frac{\pi}{2}}{2} = C$ logo $C = 1$. Portanto a solução pedida é:

$$\boxed{\frac{\mathrm{sen}^2\,y}{2}(x^2+1) = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathrm{sen}^2\,y = \frac{1}{x^2+1}}.$$

Mais 0,5 pontos até aqui

(Note que $\mathrm{sen}\,y = \pm\sqrt{\frac{2}{x^2+1}}$ então $y(x) = \pm\mathrm{arcsen}(\sqrt{\frac{2}{x^2+1}})$.)

Resolvendo pelo método das variáveis separáveis

$$(x\sin y)dx + ((x^2+1)\cos y)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{\cos y}{\sin y}dy = 0.$$

Logo

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx \ + \int \frac{\cos y}{\sin y}dy \quad = 0.$$

0,25 pontos até aqui

Mas

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{\ln(x^2+1)}{2} + c_1$$

Mais 0,25 pontos até aqui

e

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}dy \ = \ln|\sin y| + c_2$$

Mais 0,25 pontos até aqui

Logo

$$\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln|\sin y| = c \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2+1}\,|\sin y|) = c$$

Mais 0,5 pontos até aqui

Mas $y(1) = \frac{\pi}{2}$ então $c = \ln(\sqrt{2}\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|) = \ln\sqrt{2}$. Logo a solução do p.v.i. na forma implícita é:

$$\boxed{\sqrt{x^2+1}\,|\sin y| = \sqrt{2}}$$

Mais 0,5 pontos até aqui

(ou, de forma expícita, $y(x) = \pm\text{arcsen}\sqrt{\frac{2}{x^2+1}}$).

Questão 3.

Solução da equação homogênea associada $y'' - 2y' - 8y = 0$

Equação característica: $r^2 - 2r - 8y = 0$; raízes:

$$\Delta = 4 + 32 = 36$$
$$r = (2 \pm 6)/2 = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

0,3 pontos até aqui

Conjunto fundamental de soluções : $y_1 = \mathrm{e}^{-2x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{4x}$
Solução geral da equação homogênea:

$$y_h = c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,\mathrm{e}^{4x}.$$

Mais 0,4 pontos até aqui

Solução particular $\mathbf{y_p}$ **Mais 1,0 ponto por um dos métodos**

Por variação de parâmetros:
Wronskiano:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{4x} \\ -2\,\mathrm{e}^{-2x} & 4\,\mathrm{e}^{4x} \end{vmatrix} = 4\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{2x} = 6\,\mathrm{e}^{2x}.$$

0,2 pontos até aqui

Sabemos que $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, onde $u_1 = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx$ e $u_2 = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx$,

$\boxed{\textbf{0,2 pontos até aqui}}$
sendo que

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{4x} \\ 3\,e^{-2x} & 4\,e^{4x} \end{vmatrix} = -3\,e^{2x}$$

e

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2\,e^{-2x} & 3\,e^{-2x} \end{vmatrix} = 3\,e^{-4x},$$

$\boxed{\textbf{0,2 pontos até aqui}}$ logo

$$u_1 = \int \frac{-3\,e^{2x}}{6\,e^{2x}} dx = -\frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2}x \quad (+c),$$

$$u_2 = \int \frac{3\,e^{-4x}}{6\,e^{2x}} dx = \frac{1}{2}\int e^{-6x}\,dx = -\frac{1}{12}\,e^{-6x} \quad (+c)$$

$\boxed{\textbf{Mais 0,2 pontos até aqui}}$ e

$$y_p = (-\frac{1}{2}x)\,e^{-2x} + (-\frac{1}{12}\,e^{-6x})\,e^{4x} = -\frac{1}{2}x\,e^{-2x} - \frac{1}{12}\,e^{-2x}$$

$\boxed{\textbf{Mais 0,2 pontos até aqui}}$
(note que $\frac{1}{12}\,e^{-2x}$ é uma solução da equação homogênea, logo podemos desprezar este termo).

<u>Por coefiecientes indeterminados</u>:

$$y_p = Ax\,e^{-2x}$$

$\boxed{\textbf{0,5 pontos até aqui}}$
(note que -2 é raiz da equação característica com multiplicidade um); derivando e substituindo na equação, obtemos

$$\begin{array}{l} y_p' = A\,e^{-2x} - 2Ax\,e^{-2x} \\ y_p'' = -4A\,e^{-2x} + 4Ax\,e^{-2x}; \\ (-4A\,e^{-2x} + 4Ax\,e^{-2x}) - 2(A\,e^{-2x} - 2Ax\,e^{-2x}) - 8(Ax\,e^{-2x}) = 3\,e^{-2x} \\ -6A\,e^{-2x} = 3\,e^{-2x} \\ \boxed{A = -1/2} \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Mais 0,5 pontos até aqui}}$

Solução geral da equação dada

$$y = y_h + y_p$$
$$\boxed{y = c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{4x} - \tfrac{1}{2}x\,e^{-2x}}.$$

Condições iniciais **Mais 0,3 pontos**

$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$; $y'(0) = -1/2 \Rightarrow -2c_1 + 4c_2 - 1/2 = -1/2$, logo (resolvendo) $c_1 = 2/3$ e $c_2 = 1/3$.

Solução do pvi dado

$$\boxed{y = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-2x} + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{4x} - \tfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Questão 4

4a) Enunciado do Teorema da Existência e Unicidade de soluções para equações diferenciais de segunda ordem.

Teorema: Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0, \end{cases}$$

onde p, q e g são funções contínuas **0,3 pontos até aqui** em um intervalo aberto I contendo o ponto t_0. Então, existe **mais 0,2 pontos** exatamente **mais 0,2 pontos** uma solução $y = \phi(t)$ desse problema e a solução existe em todo o intervalo I. **mais 0,3 pontos**

4b) Verificando que $\phi_1(t) = t^2\operatorname{sen}(t)$ é solução do PVI :

$$\begin{cases} t^2y'' - 4ty' + (t^2+6)y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Calculando as derivadas de $\phi_1(t)$

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= t^2\operatorname{sen}(t) \\ \phi_1'(t) &= 2t\operatorname{sen}(t) + t^2\cos(t) \\ \phi_1''(t) &= 2\operatorname{sen}(t) + 4t\cos(t) - t^2\operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

0,1 pontos até aqui

Substituindo na equação diferencial

$$t^2(2\operatorname{sen}(t) + 4t\cos(t) - t^2\operatorname{sen}(t)) - 4t(2t\operatorname{sen}(t) + t^2\cos(t)) + (t^2+6)t^2\operatorname{sen}(t) =$$
$$2t^2\operatorname{sen}(t) + 4t^3\cos(t) - t^4\operatorname{sen}(t) - 8t^2\operatorname{sen}(t) - 4t^3\cos t + t^4\operatorname{sen} t + 6t^2\operatorname{sen} t = 0$$

$\boxed{\textbf{mais 0,1 pontos}}$

$\phi(0) = 0$

$\phi_1'(0) = 0$

$\boxed{\textbf{mais 0,1 pontos}}$

Logo, $\phi_1(t)$ é solução da equação diferencial.

$\boldsymbol{\phi_2(t) \equiv 0}$ ***é solução:*** $t^2 0 - 4t0 + (t^2+6)0 = 0$ $\boxed{\textbf{mais 0,1 pontos}}$ e $\phi_2(0) = \phi_2'(0) = 0$.

$\boxed{\textbf{mais 0,1 pontos}}$

4c) Dividindo a equação diferencial por t^2 temos

$$y'' - \frac{4}{t}y' + \frac{t^2+6}{t^2}y = 0.$$

O fato das funções $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ serem soluções da equação diferencial não contradiz o TEU, já que a hipótese de $p(t) = \dfrac{4}{t}$ e $q(t) = \dfrac{t^2+6}{t^2}$ serem funções contínuas em um intervalo aberto I contendo $t_0 = 0$ não está satisfeita.

$\boxed{\textbf{0,25 pontos se a justificativa for incompleta}}$

Questão 5

5a)

$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2}.$$

$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2} = \frac{As + A + B}{(s+1)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 1,\ B = -1.$$

$\boxed{\textbf{0,1 pontos até aqui}}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\right\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}}_{e^{-t}} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}}_{G(s+1)} \qquad \boxed{\textbf{mais 0,1 pontos}}$$

onde $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = e^{-t}$; $\boxed{\textbf{mais 0,2 pontos}}$ $\mathcal{L}^{-1}\{G(s+1)\} = e^{-t}g(t)$; $\boxed{\textbf{mais 0,2 pontos}}$ $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$ $\boxed{\textbf{mais 0,2 pontos}}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{-1}\{G(s+1)\} = e^{-t}t$. $\boxed{\textbf{mais 0,1 pontos}}$ Logo, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\right\} = (1-t)e^{-t}$. $\boxed{\textbf{mais 0,1 pontos}}$

5b) A função f pode ser escrita como

$$f(t) = u_2(t) - u_4(t)$$

Para resolver o problema de valores iniciais

$$y''(t) + 4y(t) = f(t) = u_2(t) - u_4(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

calculamos a transformada de Laplace em ambos os lados da equação:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{u_2(t)\} - \mathcal{L}\{u_4(t)\}$$

Usando a propriedades da transformada de Laplace com respeito a derivação e linearidade, usando a tabela para $\mathcal{L}\{u_c(t)\}$ e denotando por $Y(s)$ a transformada de Laplace de $\mathcal{L}\{y\}$, a equação fica

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = e^{-2s}/s - e^{-4s}/s$$

Como $y(0) = y'(0) = 0$, temos então

$$(s^2+4)Y(s) = e^{-2s}/s - e^{-4s}/s \quad \text{ou } Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-4s}}{s(s^2+4)}.$$

$\boxed{\textbf{0,2 pontos até aqui}}$

Denotemos por $H(s) = 1/s(s^2+4)$. Se encontramos a transformada inversa $h(t)$ de $H(s)$, então pela tabela vamos ter que

$$y(t) = u_2(t)h(t-2) - u_4(t)h(t-4).$$

$\boxed{\textbf{Mais 0,3 pontos}}$

Calculemos então a transformada inversa de $H(s)$: por frações parciais,

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{(A+B)s^2+Cs+4A}{s(s^2+4)},$$

de onde podemos deduzir que $A = 1/4$, $B = -1/4$ e $C = 0$. Assim,

$$H(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right).$$

Pela linearidade da transformada inversa e pela tabela, temos

$$h(t) = \frac{1}{4}(1-\cos(2t)).$$

E finalmente

$$\boxed{y(t) = \tfrac{1}{4}\left(u_2(t)(1-\cos(2t-4)) - u_4(t)(1-\cos(2t-8))\right)}$$

$\boxed{\textbf{Mais 0,3 pontos até aqui}}$

5c) Pela definição da função $u_c(t) = 0$ para $0 \le t < c$ e $u_c(t) = 1$ para $c \le t$, temos que

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ \frac{1}{4}(1-\cos(2t-4)), & 2 \le t < 4 \\ \frac{1}{4}(\cos(2t-8)-\cos(2t-4)), & 4 \le t \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{0,0 pontos se errado}}$