MA-311 - Cálculo III - 1s2013 - Turmas P e Q 3a. Prova

Gabarito

1. a) (1,0 ponto) *Determine a convergência das séries numéricas, verificando todas as condições do Teste de Convergência utilizado.*

i) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ **ii)** $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

i) Série divergente. Pode ser verificado usando o Teste da Comparação: $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$;

0,3 pontos

$\sum \frac{1}{n}$ é divergente (série harmônica). **0,2**

ii) Convergente.

Teste da Série Alternada.

0,2

Verificar as condições (hipóteses) **0,3**

b) (1,0) *Determine o raio de convergência da série de potências* $\sum \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}x^n$.

Seja $a_n = \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}x^n$.

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}\frac{3^n\sqrt{n}}{|x|^n} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{n+1}}|x|$.

0,2

$\lim \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{n+1}}|x| = \frac{1}{3}|x|\sqrt{\lim \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{3}|x|\sqrt{1} = \frac{1}{3}|x|$. **0,3**

Logo, pelo Teste da Razão, concluímos que a série dada é convergente se $\frac{1}{3}|x| < 1$ e divergente se $\frac{1}{3}|x| > 1$, **0,3**

i.e. convergente se $|x| < 3$ e divergente se $|x| > 3$. Portanto, o raio de convergência é 3.

0,2

c) (0,5) *Determine o domínio da função* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}(x+1)^n$.

Pelo item **b)**, temos que se $|x+1| < 3$ então $\in$ Dom.f, i.e.

$$-3 < x+1 < 3, \quad -4 < x < 2;$$

0,2

e se $|x+1| > 3$ então $\notin$ Dom.f, i.e. $x > 2$ ou $x < -4$.

0,1

Além disso, se $x = 2$ temos a série $\sum \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}3^n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergente (item **a)**)

0,1

e se $x = -4$ temos a série $\sum \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}(-3)^n = \sum \frac{(-1)^n(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergente.

0,1

Conclusão: Dom.$f = (-4, 2]$.

2. a) (0,5) *Resolva a equação de Euler* $x^2y'' + xy' - y = 0$.

Equação indicial: $r(r-1) + r - 1 = 0,\ r^2 - 1 = 0;$ raízes: $r = \pm 1$

0,1

Soluções (linearmente independentes): $y_1 = |x|,\ y_2 = |x|^{-1}$.

$+\ \mathbf{0,2}$

Solução (geral; em $(-\infty, 0)$ ou $(0,\infty)$): $y = c_1|x| + c_2|x|^{-1}$ $(y = c_1x + c_2x^{-1})$.

$+\ \mathbf{0,2}$

b) (0,5) *Seja* $L[y] = x^2y'' + xy' + (x^2-1)y$. *Escrevendo* $\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ *(série de Frobenius), mostre que*

$L[\Phi] = (r^2-1)a_0x^r + [(r+1)^2 - 1]a_1x^{1+r} + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{[(n+r)^2-1]\,a_n + a_{n-2}\right\}x^{n+r}$.

$$\mathrm{L}[\Phi] = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2} + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} + x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

0,1

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

$+\ \mathbf{0,1}$

$$= [r(r-1) + r - 1]\,a_0x^r + [(1+r)r + (1+r) - 1]\,a_1x^{1+r} + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{[(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 1]\,a_n + a_{n-2}\right\}x^{n+r}$$

$+\ \mathbf{0,3}$

$$= [r^2-1]\,a_0x^r + [(1+r)^2-1]\,a_1x^{1+r} + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{[(n+r)^2-1]\,a_n + a_{n-2}\right\}x^{n+r}$$

($r(r-1)+r-1 = r^2-r+r-1 = r^2-1$; $(1+r)r+(1+r)-1 = (1+r)(r+1)-1 = (1+r)^2-1$; $(n+r)(n+r-1)+(n+r)-1 = (n+r)^2-(n+r)+(n+r)-1 = (n+r)^2-1$.)

c) (1,0) *Tomando* $r = 1$ *no item* **b)** *(pode usá-lo sem o ter resolvido) obtenha que* $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2^{2n}(n+1)!n!}$ *é uma solução da equação* $L[y] = 0$. *Faça todos os detalhes para chegar nessa fórmula, incluindo a relação de recorrência.*

Tomando $r = 1$ e escrevendo $y_1 = \Phi$, obtemos

$$\mathrm{L}[y_1] = 3a_1x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+1)^2-1\right]a_n + a_{n-2}\right\}x^{n+1} \qquad \mathbf{0,1}$$

$$\left(\quad (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n = n(n+2) \quad\right)$$

Daí, impondo que todos os coeficiente sejam nulos, ou seja,

$$3a_1 = 0, \quad \boxed{a_1 = 0}\,, \qquad \mathbf{0,1}$$

$$\left[(n+1)^2-1\right]a_n + a_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \cdots, \qquad \mathbf{0,1}$$

obtemos que $\mathrm{L}[y_1] = 0$, ou seja, que y_1 é uma solução da equação em questão.

Da última relação acima, temos a relação de recorrência:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+1)^2 - 1} \qquad \left(\ a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2)} \ \right) \qquad \mathbf{0,2}$$

Daí e de $a_1 = 0$, notando que a diferença entre os índices no lado esquerdo e direito dessa relação é 2, concluímos que

$$a_n = 0 \text{ para todo } n \text{ ímpar.}$$

0,2

Para n par a relação fica

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n+2)} = -\frac{a_{2(n-1)}}{2^2 n(n+1)},$$

donde, tomando $a_0 = 1$, se conclui que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+1)!}$$

($a_2 = -\frac{1}{2^2 1\cdot 2}$, $a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2\cdot 3)} = -\left(-\frac{1}{2^2 1\cdot 2}\right)\frac{1}{2^2 2\cdot 3} = \frac{1}{(2^2)(2^2)(1\cdot 2)(2\cdot 3)} = \frac{1}{2^{2\cdot 2} 2! 3!}$,
$a_6 = -\frac{a_4}{2^2 3\cdot 4} = -\frac{1}{2^{2\cdot 2} 2! 3!}\frac{1}{2^2 3\cdot 4} = -\frac{1}{2^{2\cdot 3} 3! 4!}$, $\cdots$)

0,2

Portanto,

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0 x + a_2 x^{2+1} + a_4 x^{4+1} + \cdots$$

0,1

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n+1}, \qquad \text{em que} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+1)!} \ ,$$

é uma solução da equação dada.

d) (0,5) ***Sem usar testes de convergência****, responda (use o Teorema de Frobenius): qual é o domínio da função y_1 no item* **c)***?* ***Não esqueça de justificar***, com a matéria vista/cf. livro-texto.

A equação dada é do tipo $x^2 y'' + x[xp(x)]y' + x^2 q(x) y = 0$, sendo $xp(x) = 1$ e $x^2 q(x) = x^2 - 1$. Como estas funções são analíticas (séries de potências) em torno de $x_0 = 0$, temos que o pontos $x_0 = 0$ é um ponto singular regular ($p(x) = 1/x$ não é analítica em $x_0 = 0$, pois e.g. não existe o limite $\lim_{x\to 0}(1/x)$, logo, $x_0 = 0$ não é um ponto ordinário/é um ponto singular.) **0,1**

Então, pelo Teorema (teoria) de Frobenius, concluímos que o raio de convergência das séries de potências envolvidas na solução em série de Frobenius é maior do que ou igual ao menor dos raios de convergências das séries de potências de $xp(x)$ e $x^2 q(x)$ em torno de $x_0 = 0$. $+$ **0,2**

Como estas funções são polinomiais (somas finitas) temos que esses raios são infinitos, logo, o raio de convergência da série de potências y_1 é também infinito, donde o domínio (intervalo de convergência) de y_1 é $\mathbb{R}$ (a reta toda). $+$ **0,2**

3. *Seja* $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, $f(x+2) = f(x)$.

a) (0,5) *Sem calcular a série de Fourier (use o Teorema de Fourier), responda: para que valor a série de Fourier converge em* $x = 0$*? (*Não esqueça a justificativa.*)*

O Teorema de Fourier diz que se f é periódica seccionalmente contínua com f' também seccionalmente contínua, então, a série de Fourier converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$, para qualquer x. $\mathbf{0,3}$

No caso em questão, temos:

$$\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{0+1}{2} = 1/2$$

$\mathbf{0,2}$

b) (1,5) *Calcule a série de Fourier da função* f.

$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ $\mathbf{0,1}$

$\quad = \int_{-1}^{0} 1dx = 1$ $\mathbf{0,2}$

$n \geq 1: \; a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x dx$ $\mathbf{0,1}$

$\quad = \int_{-1}^{1} \cos n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x \Big|_{-1}^{0} = 0$

$\mathbf{0,2}$

$b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \operatorname{sen} n\pi x dx$ $\mathbf{0,1}$

$\quad = \int_{-1}^{1} \operatorname{sen} n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_{-1}^{0} = 0 = \frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -\frac{2}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$ $\mathbf{0,2}$

<u>Série de Fourier</u>:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\pi x + b_n \operatorname{sen} n\pi x\}$$ $\mathbf{0,2}$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1,\text{ímpar}}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x$$ $\mathbf{0,1}$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}(2n-1)\pi x$$ $\mathbf{0,2}$

c) (0,5) *Tomando* $x = -1/2$ *deduza o valor da soma* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

$x = -1/2$ é um ponto de continuidade da função f. Então, pelo Teorema de Fourier, a série acima em $x = -1/2$ converge para $f(-1/2) = 1$. $\mathbf{0,2}$

Logo,

$1 = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}(2n-1)(-\frac{\pi}{2})$ $\mathbf{0,1}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)}$

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} = \pi/4}$ $\mathbf{0,2}$

4. (2,5) *Resolva o PVIF (problema de valor inicial e de fronteira)*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos n\pi x, & 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

pelo método de separação de variáveis.

Separação de variáveis:

$u(x,t) = X(x)T(t)$
$u_{tt} = XT''$, $u_{xx} = X''T$; **0,2**

$$XT'' = X''T, \qquad \frac{XT''}{XT} = \frac{X''T}{XT}, \qquad \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}$$

+ 0,2

$\dfrac{T''}{T} = -\lambda = \dfrac{X''}{X}$ ($\lambda =$constante)

$$T'' = -\lambda T, \qquad -X'' = \lambda X$$

+ 0,2

Condições de contorno:

$u_x(0,t) = 0 \Longrightarrow X'(0)T(t) = 0 \Longrightarrow \boxed{X'(0) = 0}$
$u_x(1,t) = 0 \Longrightarrow X'(1)T(t) = 0 \Longrightarrow \boxed{X'(1) = 0}$ **+ 0,2**

Problema de autovalores e autofunções:

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, & 0 < x < 1 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

Caso $\lambda = 0$: $X = c_1x + c_2$; $X'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ $\therefore$ $X = c_2$ (constante). $\lambda = 0$ é um autovalor, com autofunção associada e.g. $X_0 = 1$ (função constante 1). **0,1**

Caso $\lambda < 0$: $r^2 + \lambda = 0$ (equação característica); $r = \pm\sqrt{-\lambda}$ (raízes). $X = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$;

$X'(0) = 0 \Rightarrow c_1\sqrt{-\lambda} - c_2\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow c_2 = c_1$ $\therefore$ $X = c_1(e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x})$;

$X'(1) = 0 \Rightarrow c_1(\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}}) \Rightarrow c_1 = 0$. (Note que $\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}} \neq 0$, pois se fosse igual a zero, teríamos $e^{\sqrt{-\lambda}} = e^{-\sqrt{-\lambda}}$, donde, $e^{2\sqrt{-\lambda}} = 1$ e isso não ocorre pois $\sqrt{-\lambda} \neq 0$.) Então $X = 0$ (função nula, pois $c_1 = c_2 = 0$). Logo $\lambda < 0$ não é autovalor. **0,2**

Caso $\lambda > 0$: $r^2 + \lambda = 0$ (equação característica); $r = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$ (raízes, complexas, com parte real nula). $X = c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}x$; **0,1**

$X'(0) = 0 \Rightarrow -c_1\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}0 + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$; **0,1**

$\therefore$ $X = c_1\cos\sqrt{\lambda}x$.

$X'(1) = 0 \Rightarrow -c_1\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda} = 0$. (Não interessa $c_1 = 0$, pois nesse caso teríamos $X = 0$). **+ 0,1**

Então $\sqrt{\lambda}$ deve um múltiplo inteiro positivo de π e nesse caso temos que $X = \cos\sqrt{\lambda}x$ é solução do problema $-X'' = \lambda X,\ \ X'(0) = X'(1) = 0.$ Portanto, obtemos a sequência de autovalores λ_n dados por $\sqrt{\lambda_n} = n\pi,\ \ n = 1, 2, \cdots$, com autofunções associadas $X_n = \cos n\pi x.$ $+\ \mathbf{0,3}$

Solução da equação para T, $T'' = -\lambda T,\ \ \lambda = 0$ ou $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2$:

Mesma equação para X (com t no lugar de x), logo, temos o conjunto de soluções linearmente independentes: $1,\ t,\ \cos n\pi t,\ \operatorname{sen} n\pi t.$ **0,2**

Superposição de soluções; condições iniciais:

Tendo em vista a condição inicial $u_t(x, 0) = 0$, descartamos as funções $t,\ \operatorname{sen} n\pi t.$ $\mathbf{0,2}$

Então o candidato à solução fica sendo

$$u(x,t) = c_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi x \cos n\pi t$$

$+\ \mathbf{0,2}$

Note que (derivando termo a termo esta série) vemos que esta u de fato satisfaz a condição inicial $u_t(x, 0) = 0$.

Agora impondo a condição inicial $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\pi x$, obtemos

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\pi x = u(x, 0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi x$$

logo, comparando os coeficiente, obtemos que $c_0 = 0,\ \ c_n = \frac{1}{n^2}$. $+\ \mathbf{0,2}$

Portanto, a solução é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\pi x \cos n\pi t.$$