MA-311 - Turmas P e Q - Cálculo III 2a. Prova

Aluno: ______________________________ RA: ___________

Assinatura (como no RG): ________________________________

Observações: ***Não é permitido o uso de qualquer equipamento eletrônico. Desligar o celular! Não destaque o grampo da prova.***

Todas as questões (suas resoluções) devem ser justificadas com o conhecimento da Matéria - cf. livro-texto.

1. a) (1,0 ponto) Calcule a transformada de Laplace da função $f(t) = \frac{\mathrm{e}^{-10t}}{\sqrt{t}}$, sabendo que $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \sqrt{\pi}/2s^{3/2}$, $s > 0$. *Sugestão*: $1/\sqrt{t} = 2\frac{d}{dt}\sqrt{t}$.

b) (1,5) Resolva o PVI $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$, via transformada de Laplace.

2. a) (0,5) Calcule a transformada de Laplace da "função" $f(t) = 2\delta(t - \pi/2)$.

b) (1,0) Seja $F(s) = \mathcal{L}\{t^5 g(t)\}$ (a transformada de Laplace da função $h(t) = t^5 g(t)$) onde $g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le t < \pi \\ \cos t, & \text{se } t \ge \pi \end{cases}$. Mostre que $F(s) = \dfrac{d^5}{s^5}\left(\dfrac{s\,\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+1}\right)$. (*Não precisa calcular essa derivada. Note que* $\cos t = -\cos(t - \pi)$.)

c) (1,0) Calcule a solução do PVI $\begin{cases} -2y' + y = g(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ em termos de uma convolução, onde $g(t)$ é a função definida no item **b)**.
Sugestão: não calcule $\mathcal{L}\{g\}$. Faça as contas escrevendo $G = \mathcal{L}\{g\}$.

3. Seja A a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Os autovalores de A são $r = 1$ e $r = 2$ e $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$ é uma solução do sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ (no intervalo $I = \mathbf{R}$).

a) (1,5) Determine outras duas soluções $\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$ desse sistema, usando autovetores, tais que $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$ sejam linearmente indepentes (em $I = \mathbf{R}$).

b) (0,5) Escreva a solução (geral) na forma $\mathbf{x}(t) = \Psi(t)C$, onde $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental.

c) (0,5) Determine C tal que $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. (2,5) Sejam $P(t) = \begin{pmatrix} 2/t & -2/t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ \frac{t}{2}\ln t \end{pmatrix}$. Sabendo que $\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$ é uma matriz fundamental (suas colunas determinam um CFS) do sistema homogêneo $\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x}$, determine uma solução particular do sistema não homogêneo $\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ no intervalo $I = (0, \infty)$, usando o método de variação dos parâmetros.

MA-311 - Cálculo III - 2013s1 - Turmas P e Q 2a. Prova

Gabarito

1. a) (1,0 ponto) *Calcule a transformada de Laplace da função* $f(t) = \frac{e^{-10t}}{\sqrt{t}}$, *sabendo que* $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \sqrt{\pi}/2s^{3/2}$, $s > 0$. Sugestão*:* $1/\sqrt{t} = 2\frac{d}{dt}\sqrt{t}$.

$\mathcal{L}\{1/\sqrt{t}\} = \mathcal{L}\{2\frac{d}{dt}\sqrt{t}\} = 2\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}\sqrt{t}\} = 2[s\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} - \sqrt{0}] = 2s\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = 2s\sqrt{\pi}/2s^{3/2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$.

0,5 pontos até aqui.

$\mathcal{L}\{\frac{e^{-10t}}{\sqrt{t}}\} = \mathcal{L}\{1/\sqrt{t}\}(s+10) = \sqrt{\frac{\pi}{s+10}}$. $\mathbf{+\,0,5}$

1 b) (1,5) *Resolva o PVI* $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$, *via transformada de Laplace.*

$\mathcal{L}\{y'' + y' - 2y\} = \mathcal{L}\{1\}$
$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 1/s$
$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + s\mathcal{L}\{y\} - y(0) - 2\mathcal{L}\{y\} = 1/s$

0,2

$(s^2 + s - 2)\mathcal{L}\{y\} = 1/s$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s(s^2 + s - 2)}$$

$\mathbf{+\,0,2}$

$\Delta = 1 + 8 = 9$; raízes: $\frac{-1\pm3}{2} = 1, -2$

$$\therefore\ \frac{1}{s(s^2+s-2)} = \frac{1}{s(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2} \quad \text{(frações parciais)}$$

$\mathbf{+\,0,3}$

$$\frac{1}{s(s^2+s-2)} = \frac{A(s^2+s-2) + Bs(s+2) + Cs(s-1)}{s(s-1)(s+2)}$$

$\mathbf{+\,0,1}$

$A + B + C = 0$, $A + 2B - C = 0$, $-2A = 1$ $\therefore$ $\boxed{A = -1/2}$, $2A + 3B = 0 \therefore -1 + 3B = 0$, $\boxed{B = 1/3}$, $C = 1/2 - 1/3$, $\boxed{C = 1/6}$

$\mathbf{+\,0,1}$

$$\frac{1}{s(s^2+s-2)} = \frac{-1/2}{s} + \frac{1/3}{s-1} + \frac{1/6}{s+2}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+s-2)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{-1/2}{s}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/3}{s-1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/6}{s+2}\} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-2t}.$$

$\mathbf{+\,0,6}$

2. a) (0,5) *Calcule a transformada de Laplace da "função"* $f(t) = 2\delta(t - \pi/2)$.

$\mathcal{L}\{f\} = 2\mathcal{L}\{\delta(t - \pi/2)\} = 2e^{-\frac{\pi}{2}s}$. **0,5**

b) (1,0) *Seja* $F(s) = \mathcal{L}\{t^5 g(t)\}$ *(a transformada de Laplace da função* $h(t) = t^5 g(t)$*) onde* $g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le t < \pi \\ \cos t, & \text{se } t \ge \pi \end{cases}$. *Mostre que* $F(s) = \frac{d^5}{s^5}\left(\frac{s\,e^{-\pi s}}{s^2+1}\right)$. *(*Não precisa calcular essa derivada. Note que $\cos t = -\cos(t - \pi)$.*)*

$g(t) = u_\pi(t)\cos(t-\pi)$ **0,2**

$\mathcal{L}\{g\} = -\,\mathrm{e}^{-\pi s}\,\mathcal{L}\{\cos t\}$ $+\,\mathbf{0,2}$

$= -\frac{s\,\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+1}$ $+\,\mathbf{0,2}$

$\mathcal{L}\{t^5 g\} = -\mathcal{L}\{(-t)^5 g\} = -\frac{d^5}{ds^5}\mathcal{L}\{g\}$ $+\,\mathbf{0,4}$

c) (1,0) *Calcule a solução do PVI* $\begin{cases} -2y' + y = g(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ *em termos de uma convolução, onde* $g(t)$ *é a função definida no item* **b)**.

Sugestão*: não calcule* $\mathcal{L}\{g\}$*. Faça as contas escrevendo* $G = \mathcal{L}\{g\}$*.*

$\mathcal{L}\{-2y' + y\} = \mathcal{L}\{g\}$

$-2s\mathcal{L}\{y\} + 2y(0) + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g\} \equiv G$

$(-2s+1)\mathcal{L}\{y\} = G$

$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{-2s+1}G$ **0,3**

$y = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{-2s+1}G\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{-2s+1}\} * \mathcal{L}^{-1}\{G\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{-2s+1}\} * g$ $+\,\mathbf{0,3}$

$= -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1/2}\} * g = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t/2} * g$ $+\,\mathbf{0,2}$

$= -\frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)/2}\,g(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le t \le \pi \\ -\frac{1}{2}\int_\pi^t \mathrm{e}^{(t-\tau)/2}\,g(\tau)\,d\tau, & \text{se } t > \pi \end{cases}.$ $+\,\mathbf{0,2}$

3. *Seja* A *a matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. *Os autovalores de* A *são* $r = 1$ *e* $r = 2$ *e* $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$ *é uma solução do sistema* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ *(no intervalo* $I = \mathbf{R}$*).*

a) (1,5) *Determine outras duas soluções* $\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$ *desse sistema, usando autovetores, tais que* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$ *sejam linearmente indepentes (em* $I = \mathbf{R}$*).*

Sendo $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ uma solução, concluímos que o vetor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é um autovetor associado ao autovalor $r = 2$. $\mathbf{0,1}$

Autovetores, $V \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, associados ao autovalor $r = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-4\alpha = 0,\ \boxed{\alpha = 0}$

$6\beta + \gamma = 0,\ \boxed{\gamma = -6/\beta}$

$\therefore\ V \equiv (\alpha, \beta, \gamma) = (0, \beta, -6/\beta) = \beta(0, 1, -6).$ $+\,\mathbf{0,3}$

Não temos dois autovetores LI associados ao autovalor $r = 1$. $+\,\mathbf{0,1}$

Logo outras duas soluções LI são

$$\mathbf{x}^2 = \mathrm{e}^t(0,1,-6) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ -6\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \qquad +\mathbf{0,3}$$

e

$$\mathbf{x}^3 = t\mathbf{x}^1 + \mathrm{e}^t\, V_2, \quad (A-1)V_2 = (0,1,-6) \qquad +\,\mathbf{0,3}$$

$$V_2 \equiv (k_1,k_2,k_3) \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$-4k_1 = 1, \quad \boxed{k_1 = -1/4}$$

$$-\tfrac{3}{4} + 6k_2 + k_3 = -6, \quad 6k_2 + k_3 = \tfrac{3}{4} - 6 = \tfrac{3-24}{4} = -\tfrac{21}{4}. \qquad +\,\mathbf{0,2}$$

Tomando $k_2 = 0$ obtemos $\boxed{k_3 = -21/4}$, $\boxed{V_2 = (-1/4, 0, -21/4)}$

$$\therefore \quad \mathbf{x}^3 = t(0,\mathrm{e}^t,-6\,\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t(-1/4,0,-21/4) \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^t \\ t\,\mathrm{e}^t \\ -(6t+21/4)\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \qquad +\,\mathbf{0,2}$$

b) (0,5) *Escreva a solução (geral) na forma* $\mathbf{x}(t) = \Psi(t)C$, *onde* $\Psi(t)$ *é uma matriz fundamental.*

$$\Psi(t) = (\mathbf{x}^1\ \mathbf{x}^2\ \mathbf{x}^3) \qquad \mathbf{0,1}$$

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x} + c_3\mathbf{x}^3 \qquad +\,\mathbf{0,1}$$

$$= (\mathbf{x}^1\ \mathbf{x}^2\ \mathbf{x}^3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \Psi(t)C, \qquad \left(\ C \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\ \right). \qquad +\,\mathbf{0,1}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t & t\,\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{2t} & -6\,\mathrm{e}^t & -(6t+21/4)\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix} C \qquad +\,\mathbf{0,2}$$

c) (0,5) *Determine* C *tal que* $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\Psi(0)C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{0,1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -21/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad +\,\mathbf{0,1}$$

$$-\tfrac{1}{4}c_1 = 1, \quad \boxed{c_1 = -4}$$

$$\boxed{c_2 = 0}$$

$$-4 - \tfrac{21}{4}c_3 = 0, \quad \boxed{c_3 = -1/21}$$

$$+\,\mathbf{0,3}$$

4. **(2,5)** *Sejam* $P(t) = \begin{pmatrix} 2/t & -2/t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ \frac{t}{2}\ln t \end{pmatrix}$.

Sabendo que $\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$ *é uma matriz fundamental (suas colunas determinam um CFS) do sistema homogêneo* $\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x}$, *determine uma solução particular do sistema não homogêneo* $\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ *no intervalo* $I = (0, \infty)$, *usando o método de variação dos parâmetros.*

$\mathbf{x} = \Psi(t)U, \quad \Psi(t)U' = \mathbf{g}$ **0,4**

Escrevendo $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ t & t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln t \\ \frac{t}{2}\ln t \end{pmatrix} \qquad +\mathbf{0,4}$$

$$\begin{cases} u_1' + 2tu_2' = & \ln t \\ tu_1' + t^2u_2' = & \frac{t}{2}\ln t \end{cases} \qquad +\mathbf{0,2}$$

$$\begin{cases} u_1' + 2tu_2' = & \ln t \\ u_1' + tu_2' = & \frac{1}{2}\ln t \end{cases}$$

$tu_2' = \frac{1}{2}\ln t$ (subtraindo as equações) $+\mathbf{0,3}$

$u_2' = \frac{1}{2t}\ln t, \quad u_2 = \int \frac{1}{2t}\ln t\,dt = (\ln t)^2/4\ (+c)$ (resolve-se a integração fazendo a substituição $\tau = \ln t,\ dt/t = d\tau$) $+\mathbf{0,3}$

Substituindo $u_2' = \frac{1}{2t}\ln t$ na primeira equação do sistema acima, obtemos

$u_1' + \ln t = \ln t, \quad u_1 = c.$ $+\mathbf{0,3}$

Tomando $c = 1$, temos então $U = \begin{pmatrix} 1 \\ (\ln t)^2/4 \end{pmatrix}$, $+\mathbf{0,3}$

$$\mathbf{x} = \Psi(t)U = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ t & t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ (\ln t)^2/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t(\ln t)^2/2 \\ t + t^2(\ln t)^2/4 \end{pmatrix}. \qquad +\mathbf{0,3}$$