DM–IMECC–UNICAMP – Cálculo III - MA311 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **2a. prova, 20/10/2011**
Aluno: ______________________________ RA: ____________
Assinatura - igual à do RG: ___________________________________

Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligue o celular! Não destaque o grampo da prova.

Questão 1. a) (0,5 pontos) Dado

$$L[y] = x^2y'' + \alpha xy' + \beta y, \quad x > 0,$$

($y \equiv y(x)$; α, β : constantes) mostre que $L[x^r] = F(r)x^r$ para qualquer $r \in \mathbb{R}$ constante, onde $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$. Conclua que se r é uma raiz real do polinômio $F(r)$ então $y = x^r$ é uma solução da equação de Euler $L[y] = 0$ (no intervalo $x > 0$).

b) (2,0) Resolva a equação de Euler

$$L[y] = x^2y'' + 2xy' + y, \quad x > 0,$$

(dê a solução geral) no intervalo $I = (0, \infty)$. Dê também a solução no intervalo $(-\infty, 0)$.

2. a) (1,0) Calcule a tranformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < \pi \\ \cos 2t + \operatorname{sen}(t - \pi), & \pi \leq t. \end{cases}$$

b) (1,0) Expresse a transformada de Laplace inversa da função

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s+2)^2}$$

em termos de uma convolução. (Calcule explicitamente o integrando da convolução. Não precisa calcular a integral de convolução.)

3. (2,0) Resolva o PVI

$$y'' + 4y' + 4y = \delta(t-1); \quad y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = -3,$$

usando a transformada de Laplace.

4. (2,0) Resolva o sistema (dê a solução geral)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

usando autovalores e autovetores. Resolva qualquer sistema linear algébrico pelo método de redução da matriz do sistema à forma escada (por operações elementares nas linhas da matriz do sistema).

5. (2,0) Dado que

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} t\ln t \\ 1 + \ln t \end{bmatrix}$$

são soluções do sistema homogêneo

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/t^2 & 1/t \end{bmatrix},$$

no intervalo $t > 0$, calcule a solução (dê a solução geral) do sistema não-homogêneo

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 1/t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t > 0,$$

usando o método de variação dos parâmetros para sistemas.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova.

GABARITO

Questão 1. a) (0,5 pontos) *Dado*

$$L[y] = x^2y'' + \alpha xy' + \beta y, \quad x > 0,$$

($y \equiv y(x)$; α, β : constantes) mostre que $L[x^r] = F(r)x^r$ para qualquer $r \in \mathbb{R}$ constante, onde $F(r) = r(r-1)+\alpha r+\beta$. Conclua que se r é uma raiz real do polinômio $F(r)$ então $y = x^r$ é uma solução da equação de Euler $L[y] = 0$ (no intervalo $x > 0$).

$L[x^r] = x^2(x^r)'' + \alpha x(x^r)' + \beta(x^r)$ **0,1 pontos**
$= x^2r(r-1)x^{r-2} + \alpha xrx^{r-1} + \beta x^r$ **+ 0,1**
$= r(r-1)x^r + \alpha rx^r + \beta x^r$
$= F(r)x^r.$ **+ 0,1**

Se r é uma raiz real (qualquer) de $F(r)$ ($F(r) = 0$) temos que $y = x^r$ é uma função real e de $L[x^r] = F(r)x^r$, obtemos $L[x^r] = 0 \cdot x^r = 0.$ **+ 0,2**

b) (2,0) *Resolva a equação de Euler*

$$L[y] = x^2y'' + 2xy' + y, \quad x > 0,$$

(dê a solução geral) no intervalo $I = (0, \infty)$. Dê também a solução no intervalo $(-\infty, 0)$.

$\alpha = 2, \quad \beta = 1;$
$F(r) = r(r-1) + 2r + 1$
$= r^2 + r + 1;$
raízes: $\Delta = 1 - 4 = -3$
$r = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

0,2

"Solução" complexa:

$y = x^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ **+ 0,4**
$= x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{\sqrt{3}}{2}i}$
$= x^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}i\ln x}$
$= x^{-\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$

+ 0,2

CFS: $y_1 = x^{-\frac{1}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x), \quad y_2 = x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)$ **+ 0,4**

Solução geral no intervalo $(0, \infty)$:

$y_1 = x^{-\frac{1}{2}}\left(c_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + c_2\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right).$ **+ 0,4**

Solução geral no intervalo $(-\infty, 0)$:

$y_1 = (-x)^{-\frac{1}{2}}\left(c_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(-x)) + c_2\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(-x))\right).$

Aqui usamos que $y(x)$ é uma solução (qualquer) da equação de Euler no intervalo $(0, \infty)$ se, e somente se, $y(-x)$ é uma solução no intervalo $(-\infty, 0)$. **+ 0,4**

Questão 2. **a) (1,0)** *Calcule a tranformada de Laplace da função*

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \le t < \pi \\ \cos 2t + \operatorname{sen}(t-\pi), & \pi \le t. \end{cases}$$

$f(t) = \cos 2t + u_\pi(t)\operatorname{sen}(t-\pi)$ **0,3**

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\} + \mathcal{L}\{u_\pi(t)\operatorname{sen}(t-\pi)\}$ **+ 0,1**

$= \dfrac{s}{s^2+4} + \mathrm{e}^{-\pi s}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}$ **+ 0,4**

$= \dfrac{s}{s^2+4} + \dfrac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+1}$ **+ 0,2**

b) (1,0) *Expresse a transformada de Laplace inversa da função*

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s+2)^2}$$

em termos de uma convolução. (Calcule explicitamente o integrando da convolução. Não precisa calcular a integral de convolução.).

$F(s) = \dfrac{s}{s^2+4} \cdot \dfrac{1}{(s+2)^2}$ **0,2**

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{s}{s^2+4}\} * \mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{1}{(s+2)^2}\}$ **+0,2**

$= (\cos 2t) * (\mathrm{e}^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{1}{s^2}\})$ **+0,2**

$= (\cos 2t) * (\mathrm{e}^{-2t}t)$ **+0,2**

$= \int_0^t (\cos 2(t-\tau))\, \mathrm{e}^{-2\tau}\tau \, d\tau$ **+0,2**

(ou $\int_0^t (\cos 2\tau)\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}(t-\tau)\, d\tau$)

Questão 3. **(2,0)** *Resolva o PVI*

$$y'' + 4y' + 4y = \delta(t-1); \quad y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = -3,$$

usando a transformada de Laplace.

$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$ **0,1**

$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4\,(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)) + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathrm{e}^{-s}$ **+0,6**

$(s^2+4s+4)\mathcal{L}\{y\} - 2s + 3 - 8 = \mathrm{e}^{-s}$

$(s+2)^2\mathcal{L}\{y\} = 2s + 5 + \mathrm{e}^{-s}$ **+0,2**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\} &= \frac{2s}{(s+2)^2} + \frac{5}{(s+2)^2} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{(s+2)^2} \\ &= \frac{2(s+2)}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{(s+2)^2} \\ &= \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{(s+2)^2} \end{aligned}$$

+0,2

$y = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s+2}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+2)^2}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\mathrm{e}^{-s}}{(s+2)^2}\}$

+0,1

$$= 2e^{-2t} + e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s^2}\} + u_1(t)\mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{(s+2)^2}\}(t-1) \qquad \mathbf{+0,6}$$
$$= 2e^{-2t} + te^{-2t} + u_1(t)(t-1)e^{-2(t-1)} \qquad \mathbf{+0,2}$$

Questão 4. (2,0) *Resolva o sistema (dê a solução geral)*

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x},$$

usando autovalores e autovetores. Resolva qualquer sistema linear algébrico pelo método de redução da matriz do sistema à forma escada (por operações elementares nas linhas da matriz do sistema).

Autovalores:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -(3-\lambda)(1+\lambda)+4 &= 0 \\ (\lambda-1)^2 &= 0 \\ \lambda = 1 & \qquad \text{(multiplicidade 2)} \end{aligned}$$

0,2

Autovetores:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ a-2b &= 0 \\ a = 2b & \\ V = b(2,1) & \qquad (b \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ arbitrário}) \\ & \qquad \text{só um autovetor LI} \end{aligned}$$

+0,3

Uma solução:

$$\mathbf{x}^1 = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

+ 0,3

Outra solução LI de $\mathbf{x}^1$:

$$\mathbf{x}^2 = te^tV_1 + e^tV_2;$$
$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$(A-\lambda)V_2 = V_1$$

+0,2

$$(\lambda = 1)$$

Cálculo de $V_2 \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{array}\right] \overset{L_2 \text{“=”} L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$a - 2b = 1, \quad a = 1 + 2b \qquad \mathbf{+0,2}$$

Tomando $b = 0$, obtemos $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{x}^2 = t\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t \end{pmatrix}$$

+0,2

CFS: $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$;
matriz fundamental:

$$\Psi(t) = \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 2 & 2t+1 \\ 1 & t \end{bmatrix}.$$

Solução geral:

$$\mathbf{x} = \Psi(t)C, \qquad C \equiv \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \ \text{(constante arbitrária em } \mathbb{R}^2\text{)}.$$

+0,6

Questão 5. (2,0) *Dado que*

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} t\ln t \\ 1+\ln t \end{bmatrix}$$

são soluções do sistema homogêneo

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/t^2 & 1/t \end{bmatrix},$$

no intervalo $t > 0$, calcule a solução (dê a solução geral) do sistema não-homogêneo

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 1/t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t > 0,$$

usando o método de variação dos parâmetros para sistemas.

Wronskiano:

$$W \equiv W[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] = \begin{vmatrix} t & t\ln t \\ 1 & 1+\ln t \end{vmatrix} = t \neq 0, \quad \forall\, t > 0.$$

Como $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$ são soluções do sistema homogêneo e o wronskiano não se anula no intervalo $t > 0$ e, além disso, o sistema é de ordem dois, concluímos que as duas soluções $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$ formam um conjunto fundamental de soluções (no intervalo $t > 0$), logo,

$$\Psi(t) = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] = \begin{bmatrix} t & t\ln t \\ 1 & 1+\ln t \end{bmatrix}$$

é uma matriz fundamental para o sistema homogêneo e a solução geral do mesmo é dada por

$$\mathbf{x}_H = \Psi(t)C = \begin{bmatrix} t & t\ln t \\ 1 & 1+\ln t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

0,5

Uma solução particular, pelo método de variação dos parâmetros para sistemas:

$$\mathbf{x}_P = \Psi(t)U(t), \quad \Psi(t)U'(t) = \mathbf{g}(t).$$

$+\mathbf{0,2}$

Cálculo de $U' \equiv \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}$:

$$\Psi(t)U'(t) = \mathbf{g}(t)$$

$$\begin{bmatrix} t & t\ln t \\ 1 & 1+\ln t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 1/t & t\ln t \\ 0 & 1+\ln t \end{vmatrix} \qquad \text{(regra de Cramer)} \\ &= \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2}\ln t \end{aligned}$$

$+\mathbf{0,4}$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} t & 1/t \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

$+\mathbf{0,4}$

$$u_2 = -\int \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{t} \quad (+c)$$

$$u_1 = \int \frac{1}{t^2} + \int \frac{1}{t^2} \ln t \, dt = -\frac{1}{t} + \int \frac{1}{t^2} \ln t \, dt$$

$+\mathbf{0,1}$

Cálculo da integral $\int \frac{1}{t^2} \ln t \, dt$:

$$u = \ln t, \quad dv = \tfrac{1}{t^2} dt, \quad du = \tfrac{1}{t} dt, \quad v = -\tfrac{1}{t};$$
$$\int \tfrac{1}{t^2} \ln t \, dt = uv - \int v du = -\tfrac{1}{t} \ln t + \int \tfrac{1}{t^2} dt = -\tfrac{1}{t} \ln t - \tfrac{1}{t} \quad (+c).$$

$+\mathbf{0,2}$

Solução geral:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_H + \mathbf{x}_P = \Psi(t)C + \Psi(t)U$$

$+\mathbf{0,1}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t & t\ln t \\ 1 & 1+\ln t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & t\ln t \\ 1 & 1+\ln t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{t} - \frac{1}{t}\ln t \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

$+\mathbf{0,1}$

$$= \begin{bmatrix} t(c_1 + c_2 \ln t) \\ c_1 + c_2 + c_2 \ln t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{t^2} \end{bmatrix}.$$