DM–IMECC–UNICAMP – Cálculo III - MA311 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **1a prova - reposição, 03/10/2011**

Aluno: ______________________________ RA: ____________

Assinatura - igual à do RG: ___________________________________

Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligue o celular! Não destaque o grampo da prova.

Repostas sem justificativas não serão consideradas!

1. a) (0,5 pontos) (Sem Resolver o problema) responda: o PVI abaixo tem solução? Caso positivo, a solução é única?

$$(1 - x^2 - y^2)dy - (\ln|xy|)dx = 0, \quad y(1/2) = 1/2$$

b) (0,5) Sem resolver o problema, responda: o PVI abaixo tem solução? Caso positivo, ainda **sem resolver** o problema, determine um intervalo de comprimento 4 (quatro) contido no domínio da solução.

$$(4 - x^2)y' - 2xy = 3x^2, \quad y(1) = 2/3 \qquad (y' \equiv dy/dx)$$

c) (1,0) Resolva o PVI do item **b)** acima.

2. (2,0) Resolva a equação

$$y' = y/(\mathrm{e}^{-2y} - 2xy) \qquad (y' \equiv dy/dx).$$

(Dê a solução de forma implícita.)

3. a) (1,0) Sabendo que $y_1 = \mathrm{e}^{3x}$ e $y_2 = x\mathrm{e}^{3x}$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação linear homogênea

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

determine (precisamente) a forma de uma solução particular da equação não-homogênea
$y'' - 6y' + 9y = x^2\mathrm{e}^{3x}$
que pode ser determinada pelo método dos coeficientes indeterminados.
Não precisa achar uma solução particular; dê a forma prevista pelo método.

b) (1,0) Sabendo que $y_1 = \mathrm{e}^{3x}$ e $y_2 = x\mathrm{e}^{3x}$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação linear homogênea

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

encontre uma solução particular y_p da equação não-homogênea

$$y'' - 6y' + 9y = \tfrac{1}{x}\mathrm{e}^{3x},$$

no intervalo $x > 0$, da forma $y_p = v_1y_1 + v_2y_2$, sendo v_1 e v_2 (ambas) funções não constantes.

4. (2,0) Resolva a equação $y' = y - y^3$.

5. (2,0) Resolva a equação $yy'' = (y')^3 \quad (y \equiv y(x),\ y' \equiv dy/dx)$.
Dica: faça as substituições $v = y'$, $v' \equiv dv/dx = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$.
(Dê a solução de forma implícita.)

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

BOA PROVA!

GABARITO

Questão 1. a) (0,5 pontos) *(Sem Resolver o problema) responda: o PVI abaixo tem solução? Caso positivo, a solução é única?*

$$(1 - x^2 - y^2)dy - (\ln|xy|)dx = 0, \quad y(1/2) = 1/2$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad f(x,y) := \frac{\ln|xy|}{1 - x^2 - y^2}.$$

$f(x,y)$ é o quociente das funções $g := \ln|xy|$ e $h := 1 - x^2 - y^2$. O numerador, g, é diferenciável no domínio $xy \neq 0$, i.e. $x \neq 0$ e $y \neq 0$ (pois para (x,y) neste domínio temos que $|xy| > 0$ e ln é diferenciável no intervalo $(0,\infty)$; assim, g é composta de funções diferenciáveis) e o denominador, h, é um polinômio (a duas variáveis) anulando-se apenas no círculo $x^2 + y^2 = 1$. Portanto, f é diferenciável (tem qualquer derivada parcial) no domínio $\{(x,y)\,;\, x \neq 0, y \neq 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1\}$. **0,25 pontos** até aqui.
Como podemos tomar um retângulo aberto contendo o ponto $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$ (dado pela condição inicial), e contido nesse domínio, concluímos, pelo **Teorema de Existência e Unicidade** (para equações não-lineares), que o PVI dado tem solução e a mesma é única (em algum intervalo aberto contendo o ponto $x_0 = 1/2$). $+\mathbf{0,25}$

b) (0,5) *Sem resolver o problema, responda: o PVI abaixo tem solução? Caso positivo, ainda* **sem resolver** *o problema, determine um intervalo de comprimento 4 (quatro) contido no domínio da solução.*

$$(4 - x^2)y' - 2xy = 3x^2, \quad y(1) = 2/3 \qquad (y' \equiv dy/dx)$$

A equação é uma equação linear de primeira ordem:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad p(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}, \quad q(x) = \frac{3x^2}{4 - x^2}.$$

0,1 pontos

As funções p e q são funções racionais (quocientes de polinômios) com o denominador, $4 - x^2$, anulando-se apenas nos pontos $x = \pm 2$, logo são funções contínuas nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ e $(2, \infty)$. $+\mathbf{0,15}$
Como o ponto $x_0 = 1$ (dado pela condição inicial) pertence ao intervalo $(-2, 2)$, concluímos, pelo **Teorema de Existência e Unicidade** (para equações lineares), que o PVI dado tem solução única e definida (pelo menos) neste intervalo. $+\mathbf{0,25}$

c) (1,0) *Resolva o PVI do item* **b)** *acima.*

Fator integrante: $\mu = e^{\int \frac{-2x}{4-x^2}dx} = e^{\ln|4-x^2|} = (\pm)\ (4 - x^2)\,.$

0,2 pontos até aqui.

$$
\begin{aligned}
((4-x^2)y)' &= 3x^2 \\
(4-x^2)y &= \int 3x^2 dx = x^3 + c \\
y &= \tfrac{x^3+c}{4-x^2}
\end{aligned}
$$

$+\ \mathbf{0,6}$

Condição inicial:

$$
\begin{aligned}
y(1) = 2/3: \quad & 2/3 = (1+c)/3 \\
& c = 1
\end{aligned}
$$

Solução:

$$y = \frac{x^3+1}{4-x^2}.$$

$+\ \mathbf{0,2}$

Questão 2. **(2,0)** *Resolva a equação*

$$y' = y/(\mathrm{e}^{-2y} - 2xy) \qquad (y' \equiv dy/dx).$$

(Dê a solução de forma implícita.)

$$
\begin{gathered}
\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\mathrm{e}^{-2y} - 2xy} \\
(2xy - \mathrm{e}^{-2y})dy + ydx = 0
\end{gathered}
$$

Sejam $M = y$ (coeficiente de dx) e $N = 2xy - \mathrm{e}^{-2y}$ (coeficiente de dy). Temos $M_y = 1 \neq N_x = 2y$, ou seja, a equação não é exata.

0,2

Fator integrante (equação $(M\mu)_y = (N\mu)_x$):

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{1-2y}{y} = \frac{1}{y} - 2 \qquad \text{(função só de } y\text{)}.$$

$+\mathbf{0,2}$

$$\mu' + (\tfrac{1}{y} - 2)\mu = 0$$

$+\mathbf{0,2}$

Fator integrante: $\sigma = \mathrm{e}^{\int (\frac{1}{y}-2)dy} = \mathrm{e}^{\ln|y| - 2y} = (\pm)\ \ y\mathrm{e}^{-2y}$ $+\mathbf{0,2}$

$$
\begin{aligned}
(\sigma\mu)' &= 0 \\
\sigma\mu &= c \qquad\qquad \text{(tomemos } c = 1\text{)} \\
\mu &= 1/\sigma = \tfrac{1}{y}\mathrm{e}^{2y}
\end{aligned}
$$

$+\mathbf{0,2}$

$$
\begin{gathered}
\mu(2xy - \mathrm{e}^{-2y})dy + \mu y dx = 0 \\
\tfrac{1}{y}\mathrm{e}^{2y}(2xy - \mathrm{e}^{-2y})dy + \tfrac{1}{y}\mathrm{e}^{2y} y dx = 0 \\
(2x\mathrm{e}^{2y} - \tfrac{1}{y})dy + \mathrm{e}^{2y}dx = 0
\end{gathered}
$$

+0, 2

Cálculo do 'potencial':

$$\psi_x = \mathrm{e}^{2y}$$
$$\psi = \int \mathrm{e}^{2y} dx + g(y) = x\mathrm{e}^{2y} + g(y)$$

+0, 2

$$\psi_y = 2x\mathrm{e}^{2y} + g'(y)$$

e

$$\psi_y = 2x\mathrm{e}^{2y} - \frac{1}{y},$$

+0, 2

logo,

$$g'(y) = -\frac{1}{y}, \qquad g(y) = -\ln|y| \quad (+c).$$

+0, 2

Solução (implícita):

$$\boxed{x\mathrm{e}^{2y} - \ln|y| = c}.$$

+0, 2

Questão 3. a) (1,0) *Sabendo que* $y_1 = e^{3x}$ *e* $y_2 = xe^{3x}$ *formam um conjunto fundamental de soluções para a equação linear homogênea*

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

determine (precisamente) a forma de uma solução particular da equação não-homogênea $y'' - 6y' + 9y = x^2\mathrm{e}^{3x}$
que pode ser determinada pelo método dos coeficientes indeterminados.
Não precisa achar uma solução particular; dê a forma prevista pelo método.

Como e^{3x} e $x\mathrm{e}^{3x}$ são soluções da equação (linear homogênea e com coeficientes constantes), temos que 3 é uma raiz com multiplicidade dois da equação característica.

0,3

O 'lado direito' da equação não-homogênea dada é da forma $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, sendo $\alpha = 3$, $\beta = 0$ e $P(x)$ um polinômio de grau 2. Então $\alpha + i\beta = 3$ é raiz da equação característica, com multiplicidade 2, **+ 0,3**
logo, pelo método dos coeficientes indeterminados, a equação dada tem uma solução particular da forma

$$y = x^s(A + Bx + Cx^2)\mathrm{e}^{3x},$$

onde $s = 2$ (multiplicidade de $\alpha + i\beta = 3$ como raiz da equação característica). **+ 0,4**

b) (1,0) *Sabendo que* $y_1 = e^{3x}$ *e* $y_2 = x e^{3x}$ *formam um conjunto fundamental de soluções para a equação linear homogênea*

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

encontre uma solução particular y_p *da equação não-homogênea*

$$y'' - 6y' + 9y = \tfrac{1}{x}\mathrm{e}^{3x},$$

no intervalo $x > 0$*, da forma* $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$*, sendo* v_1 *e* v_2 *(ambas) funções não constantes.*

Método de variação dos parâmetros:

$$\begin{cases} y_1 v_1' + y_2 v_2' &= 0 \\ y_1' v_1' + y_2' v_2' &= \frac{1}{x}\mathrm{e}^{3x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{3x} v_1' + x\mathrm{e}^{3x} v_2' &= 0 \\ 3\mathrm{e}^{3x} v_1' + (1+3x)\mathrm{e}^{3x} v_2' &= \frac{1}{x}\mathrm{e}^{3x} \end{cases}$$

0,3

$\mathrm{e}^{3x} v_1' = -x\mathrm{e}^{3x} v_2';$
$3(-x\mathrm{e}^{3x} v_2') + (1+3x)\mathrm{e}^{3x} v_2' = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{3x}$
$\mathrm{e}^{3x} v_2' = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{3x}$
$v_2' = \frac{1}{x}, \quad v_2 = \ln x \quad (+c)$

+ 0,3

$v_1' = -x v_2' = -1, \quad v_1 = -x \quad (+c)$

+ 0,3

$$y_p = -x\mathrm{e}^{3x} + (\ln x) x \mathrm{e}^{3x}.$$

+ 0,1

Questão 4. (2,0) *Resolva a equação* $y' = y - y^3$.

Equação de Bernoulli:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad p(x) = 1, \quad q(x) = -1, \quad n = 3.$$

+ 0, 2

Substituição: $v = y^{1-n} = y^{-2}$,
$y = v^{-1/2}, \quad y' = -\frac{1}{2}v^{-3/2}v'.$ **+ 0, 2**

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}v^{-3/2}v' + v^{-1/2} &= v^{-3/2} \\ v' - 2v &= 1 \end{aligned}$$

+ 0, 2

Fator integrante: $\mu = \mathrm{e}^{\int -2dx} = \mathrm{e}^{-2x}$.

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{-2x}v)' &= \mathrm{e}^{-2x} \\ \mathrm{e}^{-2x}v &= \int \mathrm{e}^{-2x}dx = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + c \\ v &= -\tfrac{1}{2} + c\,\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

+ 0, 2

$$y = (c\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2})^{-1/2}$$

$+\ 0,2$

Questão 5. **(2,0)** *Resolva a equação* $yy'' = (y')^3$ $\quad$ *($y \equiv y(x),\ y' \equiv dy/dx$).*
Dica*: faça as substituições* $v = y',\quad v' \equiv dv/dx = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$.
(Dê a solução de forma implícita.)

$$yv\frac{dv}{dy} = v^3$$

0,2

$$\begin{aligned} \tfrac{dv}{v^2} &= \tfrac{dy}{y} \qquad\qquad \text{(equação de variável separada)} \\ \textstyle\int \tfrac{dv}{v^2} &= \textstyle\int \tfrac{dy}{y} \\ -v^{-1} &= \ln|y| + c_1 \end{aligned}$$

+ 0,3

$$\begin{aligned} -v &= (\ln|y| + c_1)^{-1} \\ -\tfrac{dy}{dx} &= (\ln|y| + c_1)^{-1} \\ -(\ln|y| + c_1)dy &= dx \end{aligned}$$

+0, 2

$$\begin{aligned} -\textstyle\int(\ln|y| + c_1)dy &= \textstyle\int dx \\ -(y\ln|y| - y + c_1 y) &= x + c_2 \end{aligned}$$

+0,3

Cálculo da integral $\int \ln|y|dy$:

$$\begin{gathered} u = \ln(\pm y), \quad dv = dy,\ v = y \\ \textstyle\int \ln|y|dy = y\ln|y| - \int dy = y\ln|y| - y + c. \end{gathered}$$