1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	2e	2f	3	4a	4b	4c	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**
Somente serão aceitos os cálculos de resolução de sistemas, de inversas e de determinantes, utilizando os métodos ensinados no curso (os métodos do livro-texto).

$1^{\underline{a}}$ Prova de MA141 — 10/05/2016, **16:00–18:00 hs**

NOME: ______________________________ **RA:** __________ **Turma: Q**

1. (2 pt) Consideramos o sistema $\left[\begin{array}{llll} x & +y & +z & =2 \\ 2x & +3y & +2z & =5 \\ 2x & +3y & +(p^2-1)z & =p+1 \end{array}\right.$. Determinar os valores do parâmetro real p para os quais o sistema tem:

a) Solução única;
b) Infinitas soluções;
c) Nenhuma solução.
d) Nos casos (a) e (b) resolver o sistema e escrever a solução geral.

2. (3 pt) Responder explicitamente às perguntas abaixo com **Verdadeira** ou **Falsa**. Respostas sem a devida justificativa **não** serão consideradas !

a) Se A é uma matriz $n \times n$ tal que $A^2 = A$, então $A = I_n$ ou $A = O_n$, sendo O_n a matriz nula $n \times n$.
b) Se u, v, w são três vetores, então $(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$.
c) Um sistema homogêneo com 5 equações e 6 incógnitas sempre tem soluções não-nulas.
d) A distância entre os planos π: $2x - y + 3z - 7 = 0$ e ρ: $-4x + 2y - 6z + 10 = 0$ é igual a 2.
e) Se A e B são duas matrizes $n \times n$ e A é invertível, então $AB = O_n$ implica $B = O_n$.
f) Se u e v são vetores, então $|u \times v| \geq |u||v|$.

3. (2 pt) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz 5×5 cuja entrada na posição (i, j) é igual a $\min\{i, j\}$, o menor entre i e j, para todo i e j. Calcular $\det A$.

4. (3 pt) As retas r_1 e r_2 são definidas como se segue:

$$r_1: \left|\begin{array}{ll} x = & 1+t \\ y = & 2+t \\ z = & -t \end{array}\right. ; \qquad r_2: x - 2 = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{-2}.$$

a) Mostrar que r_1 e r_2 são reversas e calcular a distância entre r_1 e r_2.
b) Encontrar as equações paramétricas da reta s que é o eixo de r_1 e de r_2. (O eixo de duas retas reversas é uma reta que intersecta as duas retas dadas e é perpendicular a ambas.)
c) Encontrar os pontos de interseção de s com r_1 e com r_2.

Incluir na prova, por favor, **todas** as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

Resolução da Questão 1 (frente e verso)

Matriz ampliada do sistema: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & p^2-1 & p+1 \end{bmatrix}$

"Escalonando" (fazendo operações elementares nas suas linhas), temos:

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & p^2-3 & p-3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p^2-3 & p-4 \end{bmatrix}$$

Caso $p^2-3=0$, i.e. $p=\pm\sqrt{3}$, obtemos a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm\sqrt{3}-4 \end{bmatrix}$

cuja última linha é do tipo $[0\ 0\ 0\ c]$ onde $c \neq 0$ $(c = \pm\sqrt{3}-4)$, logo o sistema não tem solução.

Caso $p^2-3\neq 0$, i.e. $p \neq \pm\sqrt{3}$, podemos dividir a última linha da penúltima matriz acima por p^2-3, obtendo a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & (p-4)/(p^2-3) \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-(p-4)/(p^2-3) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & (p-4)/(p^2-3) \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz dos coeficientes do sistema é equivalente por linhas à matriz identidade, donde concluímos que a solução do sistema é única, a saber

$$x = 1-(p-4)/(p^2-3), \quad y = 1, \quad z = (p-4)/(p^2-3).$$

Em resumo (conclusão), temos:

a) a solução é única se $p \neq \pm\sqrt{3}$;

b) para nenhum valor de p o sistema tem infinitas soluções;

c) o sistema não soluções se $p = \pm\sqrt{3}$;

d) No caso a), a solução do sistema é a dada acima.

Resolução da Questão 2 (frente e verso)

a) Falsa. Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ satisfaz $A^2 = A$, e, $A \neq I_2$ e $A \neq 0_2$.

b) Falsa. Por exemplo, considerando os vetores canônicos $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, se $u = \vec{i}$, $v = \vec{j}$ e $w = 2v = 2\vec{j}$, então

$u \times (v \times w) = u \times 0 = 0$, mas $(u \times v) \times w = \vec{k} \times (2\vec{j}) = -2\vec{i}$.

c) Verdadeira, pois a matriz escalonada reduzida do sistema tem no máximo 5 pivôs (número de linhas) e tem 6 colunas, logo, pelo menos uma coluna não corresponde a um pivô, ou seja, há pelo menos uma variável livre.

d) Os vetores $N_1 = (2, -1, 3)$ e $N_2 = (-4, 2, -6)$ são normais aos planos π e ρ, respectivamente. Como $N_2 = -2N_1$, os planos são paralelos. Tomando $x = y = 0$, obtemos os pontos

$$P_1 = (0, 0, 7/3) \in \pi \quad \text{e} \quad P_2 = (0, 0, 5/3) \in \rho.$$

Então, usando a fórmula $dist(\pi, \rho) = |\vec{P_1P_2} \cdot N_1| / |N_1|$, obtemos

$$dist(\pi, \rho) = |(0, 0, 5/3 - 7/3) \cdot (2, -1, 3)| / \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}$$
$$= |(-2/3) \times 3| / \sqrt{14} \neq 2.$$

Logo, a afirmação é falsa.

e) Verdadeira: $AB = 0 \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)B = 0$$
$$\Rightarrow IB = 0$$
$$\Rightarrow B = 0.$$

f) Falsa: $|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \operatorname{sen}\theta$, $\theta = \angle(u, v)$

$\leq |u||v|$, visto que $\operatorname{sen}\theta \leq 1$.

Resolução da Questão 3 (frente e verso)

A matriz A é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Fazendo operações elementares nas linhas de A, temos que

$$\det A \underset{i=2,3,4,5}{\overset{L_i \to L_i - L_1}{=}} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Daí, desenvolvendo o determinando pelos cofatores da 1ª coluna, obtemos que

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{i=2,3,4}{\overset{L_i \to L_i - L_1}{=}} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{i=2,3}{\overset{L_i \to L_i - L_1}{=}} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 - 1 = 1. \quad ///$$

a) $v_1 = (1, 1, -1)$ e $v_2 = (1, 3, -2)$ são vetores paralelos às retas r_1 e r_2, respectivamente.

v_1 não é paralelo a v_2 $(1 \div 1 \neq 1 \div 3)$, logo as retas são reversas ou concorrentes.

$P_1 = (1, 2, 0)$ e $P_2 = (2, 5, 1)$ são pontos pertencentes às retas r_1 e r_2, respectivamente.

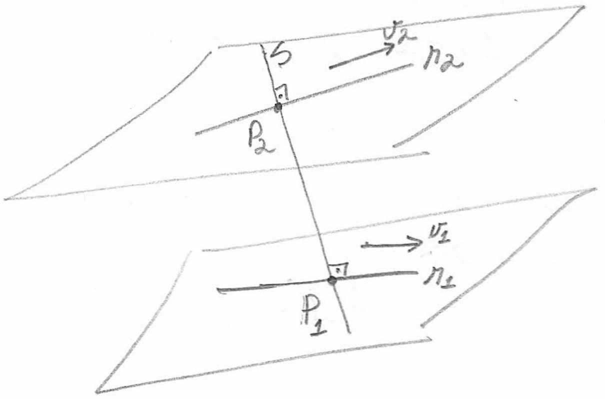
$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (v_1 \times v_2) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

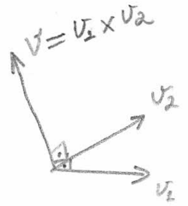
$$= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-2+3) - 3 \times (-2+1) + (3-1) = 1 - 3 \times (-1) + 2 = \underline{\underline{6 \neq 0}}$$

logo, as retas são reversas.

b)





$v := v_1 \times v_2 = (1, 1, 2) \parallel s$

Denotando por P_1 o ponto $r_1 \cap s$ e P_2 o ponto $r_2 \cap s$, devemos ter

(1) $\quad P_2 = P_1 + t\,v$,

para algum $t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, de $P_1 \in r_1$, devemos ter

(2) $\quad P_1 = (1+t_1, 2+t_1, -t_1)$

para algum $\underline{t_1 \in \mathbb{R}}$, e, analogamente, de $P_2 \in r_2$, devemos ter

(3) $\qquad P_2 = (2+t_2,\ 5+3t_2,\ 1-2t_2)$

para algum $t_2 \in \mathbb{R}$. De (1), (2), e (3), obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2+t_2 = 1+t_1+t \\ 5+3t_2 = 2+t_1+t \\ 1-2t_2 = -t_1+2t \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{cases} t+t_1-t_2 = 1 \\ t+t_1-3t_2 = 3 \\ 2t-t_1+2t_2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o mesmo temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3-2L_1]{L_2 \to L_2-L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \to -\frac{1}{3}L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}]{L_2 \to -\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2+\frac{4}{3}L_3]{L_1 \to L_1+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução é $t=1$, $t_1=-1$ e $t_2=-1$. Portanto, os pontos de interseção de s com r_1 e r_2 são

$$P_1 = (0,1,1) \quad \text{e} \quad P_2 = (1,2,3),$$

e, as equações paramétricas de s são (cf. eq.(1))

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 1+2 \end{cases}$$