DM–IMECC–UNICAMP – Cálculo III - MA311 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **1a. prova, 12/09/2011**
Aluno: ______________________________ RA: ____________
Assinatura - igual à do RG: ___________________________________

Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligue o celular!
Não destaque o grampo da prova.

1. (2,0 pontos) Resolva o PVI
$$dy + (2y-1)dx = 0, \quad y(0) = 1/2.$$

2. a) (0,5) Mostre que a equação $y + x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}$ é separável.
b) (1,0) Resolva a mesma.
c) (0,5) Ache a solução tal que $y(0) = 1$.

3. a) (1,0) Resolva a equação linear homogênea $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.
b) (1,0) Ache uma solução particular da equação $y^{(4)} + 2y'' + y = 1 + \mathrm{e}^x$ usando o método dos coeficientes indeterminados.

4. a) (1,0) Considere o operador diferencial linear de segunda ordem, dado por
$$L[y] = Py'' + Qy' + Ry.$$
Mostre a fórmula $L[fg] = L[f]g + fL[g] - Rfg + 2Pf'g'$ ou, equivalentemente, $L[fg] = L[f]g + fPg'' + (2Pf' + Qf)g'$.
b) (1,0) Sabendo que $y_1 = x$ é uma solução da equação
$$L[y] = x^2y'' - x(2-x)y' + (2-x)y = 0,$$
no intervalo $I = \mathbb{R}$, use o método de redução de ordem (de d'Alembert/'variação do parâmetro') para achar outra solução $y_2 = vy_1$ linearmente independente de y_1 (em $I = \mathbb{R}$).

5. Considere o operador $L[y] = y' - \frac{3}{2}y^{1/3}$ ($y = y(x)$, $y' \equiv \frac{dy}{dx}$).
a) (0,5) L é um operador (uma transformação) linear? i.e. $L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L[y_1] + c_2L[y_2]$ para quaisquer constantes c_1, c_2 e funções diferenciáveis y_1, y_2?
b) (0,5) A função $\phi(x) \equiv 0$ ($\phi(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$) é uma solução do PVI
$$L[y] = 0, \quad y(0) = 0$$
(em $I = \mathbb{R}$)?
c) (0,5) Encontre outra solução.
d) (0,5) Por que o Teorema de Existência e Unicidade não se aplica em relação a esse PVI?

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

BOA PROVA!

GABARITO

Questão 1. **(2,0 pontos)** *Resolva o PVI*

$$dy + (2y - 1)dx = 0, \quad y(0) = 1/2.$$

A equação é linear (de primeira ordem):

$$y' + 2y = 1.$$

Fator integrante: $\mu = e^{\int 2dx} = e^{2x}$. **0,5 pontos** até aqui.

$$\begin{aligned} (e^{2x}y)' &= e^{2x} \\ e^{2x}y &= \int e^{2x}dx = \tfrac{1}{2}e^{2x} + c \\ y &= \tfrac{1}{2} + ce^{-2x} \end{aligned}$$

+ 1,0

Condição inicial:

$$y(0) = 1/2 : \quad 1/2 = \tfrac{1}{2} + c$$
$$c = 0$$

Solução:

$$y \equiv 3 \quad (y(x) = 3, \ \forall x \in I = \mathbb{R}).$$

+ 0,5

Questão 2. **a) (0,5)** *Mostre que a equação* $y + x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}$ *é separável.*

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{y} - y \\ &= \frac{1 - y^2}{y} \end{aligned}$$

$$\frac{y}{1 - y^2}dy - \frac{1}{x}dx = 0$$

0,5

b) (1,0) *Resolva a mesma.*

Como a equação é separável, resolvemos:

$$\int \frac{y}{1 - y^2}dy - \int \frac{1}{x}dx = 0$$

0,2

(substituição: $u = 1 - y^2, \ dy = -2ydu$)

$$-\tfrac{1}{2}\ln|1 - y^2| = \ln|x| + c$$
$$\ln|1 - y^2| = -2\ln|x| + c = \ln x^{-2} + c$$

$$+\mathbf{0,4}$$

$$\begin{aligned} |1-y^2| &= \mathrm{e}^c x^{-2} \\ 1-y^2 &= kx^{-2} \quad (k \equiv \pm \mathrm{e}^c) \end{aligned}$$

$$+0,4$$

c) (0,5) *Ache a solução tal que* $y(0) = 1$.

A solução obtida acima exclui $x = 0$ e $y = \pm 1$ (para chegar na solução usamos que $1 - y^2 \neq 0$). É fácil notar que as funções constantes $y = 1$ e $y = -1$ também são soluções. A função constante $y = 1$ é a solução pedida.

0,5

Questão 3. a) (1,0) *Resolva a equação linear homogênea* $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Equação característica:

$$\begin{aligned} r^4 + 2r^2 + 1 = &\ 0 \\ & \qquad \mathbf{0,2} \\ (r^2+1)^2 = &\ 0 \\ (r-i)^2(r+i)^2 &= 0; \end{aligned}$$

raízes: $r = \pm i$, com multiplicidade 2.

$$+\mathbf{0,2}$$

CFS:

$$y_1 = \mathrm{sen}x, \quad y_2 = \cos x, \quad y_3 = x\mathrm{sen}x, \quad y_4 = x\cos x$$

$$+\mathbf{0,4}$$

Solução geral:

$$y = c_1\mathrm{sen}x + c_2\cos x + c_3 x\mathrm{sen}x + c_4 x\cos x$$

$$+\mathbf{0,2}$$

b) (1,0) *Ache uma solução particular da equação* $y^{(4)} + 2y'' + y = 1 + \mathrm{e}^x$ *usando o método dos coeficientes indeterminados.*

A equação é linear com coeficientes constantes, $L[y] = g_1 + g_2$, com g_1 e g_2 da forma $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ (P, um polinômio) sendo $P = 1$ e $\alpha = \beta = 0$ em g_1, e, $P = 1$, $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, em g_2. Então, considerando que $\alpha + i\beta = 0$ e $\alpha + i\beta = 1$ não são raízes da equação característica, a equação tem uma solução particular do tipo

$$y = A + B\mathrm{e}^x$$

0,4

$$y' = y'' = y^{(3)} = y^{(4)} = B\mathrm{e}^x$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$\begin{aligned} Be^x + 2Be^x + (A + Be^x) = &\ 1 + e^x \\ A + 4Be^x = &\ 1 + e^x \\ A = 1, &\ \ B = 1/4 \end{aligned}$$

+ 0,4

Solução particular:

$$y = 1 + \frac{1}{4}e^x$$

+ 0,2

Questão 4. a) (1,0) *Considere o operador diferencial linear de segunda ordem, dado por*
$$L[y] = Py'' + Qy' + Ry.$$
Mostre a fórmula $L[fg] = L[f]g + fL[g] - Rfg + 2Pf'g'$ *ou, equivalentemente,* $L[fg] = L[f]g + fPg'' + (2Pf' + Qf)g'$.

Seja $y = fg$.

$$\begin{aligned} y' &= f'g + fg' \\ y'' &= f''g + 2f'g' + fg'' \end{aligned}$$

0, 2

$$L[fg] = P(f''g + 2f'g' + fg'') + Q(f'g + fg') + R(fg)$$

+ 0, 2

$$\begin{aligned} &= (Pf'' + Qf' + Rf)g + f(Pg'' + Qg' + Rg) - Rfg + 2Pf'g' \\ &= L[f]g + fL[g] - Rfg + 2Pf'g' \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &= (Pf'' + Qf' + Rf)g + fPg'' + Qg' + 2Pf'g' \\ &= L[f]g + fPg'' + (2Pf' + Qf)g' \end{aligned}$$

+ 0, 6

b) (1,0) *Sabendo que* $y_1 = x$ *é uma solução da equação*

$$L[y] = x^2y'' - x(2 - x)y' + (2 - x)y = 0,$$

no intervalo $I = \mathbb{R}$, *use o método de redução de ordem (de d'Alembert/'variação do parâmetro') para achar outra solução* $y_2 = vy_1$ *linearmente independente de* y_1 *(em* $I = \mathbb{R}$*).*

Pelo item **a)** (com $f = y_1$ e $g = v$),

$$\begin{aligned} L[y_2] &= y_1x^2v'' + (2x^2y_1' - x(2 - x)y_1)v' \\ &= xx^2v'' + (2x^2 - x(2 - x)x)v' \\ &= x^3v'' + x^3v' \end{aligned}$$

logo, substituindo na equação, obtemos:

$$\begin{aligned} x^3v'' + x^3v' = &\ 0 \\ v'' + v' = &\ 0 \end{aligned}$$

0,5

$$v' = \mathrm{e}^{-x}, \quad v = \mathrm{e}^{-x}$$

$$y_2 = x\mathrm{e}^{-x}$$

+ 0,5

Questão 5. *Considere o operador* $L[y] = y' - \frac{3}{2}y^{1/3}$ $(y = y(x),\ y' \equiv \frac{dy}{dx})$.

a) (0,5) *L é um operador (uma transformação) linear? i.e.* $L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L[y_1] + c_2L[y_2]$ *para quaisquer constantes* c_1, c_2 *e funções diferenciáveis* y_1, y_2*?*

Não. Por exemplo, para $y = 1$ (função constante) e $c = 2$, temos:

$$\begin{aligned} L[cy] &= -\tfrac{3}{2}(cy)^{1/3} = -\tfrac{3}{2}2^{1/3} \\ &\neq cL[y] = 2(-\tfrac{3}{2}1^{1/3}) = -3 \end{aligned}$$

0,5

b) (0,5) *A função* $\phi(x) \equiv 0$ $(\phi(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R})$ *é uma solução do PVI*

$$L[y] = 0, \quad y(0) = 0$$

(em $I = \mathbb{R}$*)?*

Sim: $L[\phi](x) = \phi'(x) - \frac{3}{2}\phi(x)^{1/3} = 0 - \frac{3}{2}0 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

0,3

$\phi(0) = 0$ ($\phi(x) = 0$, $\forall x$).

$\mathbf{+0,2}$

c) (0,5) *Encontre outra solução.*

$$\begin{aligned} y' - \tfrac{3}{2}y^{1/3} &= 0 \\ \tfrac{dy}{dx} - \tfrac{3}{2}y^{1/3} &= 0 \\ y^{-1/3}dy - \tfrac{3}{2}dx &= 0, \quad \text{supondo } y \neq 0; \end{aligned}$$

0,2

equação de variáveis separadas, logo:

$$\begin{aligned} \textstyle\int y^{-1/3}dy &= \textstyle\int \tfrac{3}{2}dx \\ \tfrac{3}{2}y^{2/3} &= \tfrac{3}{2}x + c \\ y^{2/3} &= x + c \\ y &= (x + c)^{3/2}, \quad \text{se } x \geq -c \end{aligned}$$

$\mathbf{+0,2}$

Tomando $c = 0$ e $y = 0$ para $x < 0$, obtemos uma segunda solução:

$$y = \begin{cases} x^{3/2}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

d) (0,5) *Por que o Teorema de Existência e Unicidade não se aplica em relação a esse PVI?*

O Teorema de Existência e Unicidade afirma que se $f(x, y)$ é uma função contínua num retângulo R aberto ($\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$) com f_y também contínua em R e se (x_0, y_0) é um ponto em R, então o PVI

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (y' \equiv dy/dx)$$

tem uma única solução definida em algum intervalo aberto contendo x_0.

0,2

No problema em questão, temos $f(x, y) = \frac{3}{2}y^{1/3}$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

$\mathbf{+0,1}$

Como $f_y = \frac{1}{2}y^{-2/3}$ (se $y \neq 0$) não tem limite quando y tende a zero, temos que f_y não é uma função contínua em nenhum retângulo aberto contendo o ponto $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Logo, uma das hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade não é satisfeita.

$\mathbf{+0,2}$