MA311-2007-1$^{\text{O}}$ Semestre – Gabarito – Exame – Manhã

Questão 1

a) Temos que a série de Fourier em senos de f com período 20 é dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{10},$$

(0,25 até aqui)

onde

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{10}\int_0^{10} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{10} dx}_{dv} \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{-10}{n\pi} x \cos \tfrac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10} + \frac{10}{n\pi}\int_0^{10} \cos \tfrac{n\pi x}{10} dx\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{-100}{n\pi}\cos n\pi + \underbrace{\frac{100}{n^2\pi^2}\sin \frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10}}_{0}\right] \\
&= \frac{-20}{n\pi}(-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}20}{n\pi}.
\end{aligned}$$

(mais 0,5 até aqui)

Logo a série de Fourier pedida é:

$$\frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{10}.$$

(mais 0,25 até aqui)

b) Derivando $h(x,t) = X(x)T(t)$ e substituindo na equação $2u_{xx} = u_t$ temos,

$$2X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{2T(t)},$$

(mais 0,5 até aqui)

logo, $\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ e $\dfrac{T'(t)}{2T(t)}$ são funções constantes e assim X e T devem satisfazer as EDO's

$$\left\{\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + 2\lambda T(t) = 0 \end{array}\right. ,$$

onde λ é uma constante qualquer.
(mais 0,5 até aqui)

c)

$$h(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0;\ \forall t \Rightarrow X(0) = 0;$$

(mais 0,5 até aqui)

$$h(10,t) = 0 \Rightarrow X(10)T(t) = 0;\ \forall t \Rightarrow X(10) = 0;$$

(mais 0,5 até aqui)

d) Problema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2u_{xx} = u_t \\ u(0,t) = u(10,t) = 0;\ \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x);\ \ 0 < x < 10\,. \end{array}\right.$$

Separação de Variáveis: Tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$, temos pelo item b) que X e T devem satisfazer os sistema

$$\left\{\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + 2\lambda T(t) = 0\,, \end{array}\right.$$

λ uma constante.
(mais 0,2 até aqui)

Condições de Contorno: Pelo item c), $X(0) = X(10) = 0$.

Assim, as funções $u_n(x,t) = e^{\frac{-2n^2\pi^2}{100}t} \sin \frac{n\pi x}{10}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ são soluções para o problema de contorno

$$\left\{\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + 2\lambda T(t) = 0 \\ X(0) = X(10) = 0 \end{array}\right. .$$

(mais 0,2 até aqui)

Superposição de soluções: Buscamos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-2n^2\pi^2}{100}t} \sin \frac{n\pi x}{10},$$

que satisfaça $u(x,0) = f(x)$, $0 < x < 10$, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{10}.$$

(mais 0,2 até aqui)

(Queremos encontrar $b_n's$ tal que no intervalo $0 < x < 10$ f seja sua série de Fourier em senos.) Segue do item c) que $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}20}{n\pi}$

(mais 0,2 até aqui)

e a solução do problema dado é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}20}{n\pi} e^{\frac{-2n^2\pi^2}{100}t} \sin \frac{n\pi x}{10}.$$

(mais 0,2 até aqui)

Questão 2

O p.v.i. dado pode ser escrito como

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = u_2(t) \\ y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = -2 \end{cases}$$

(Vale 0,2 pontos até aqui.)

Aplicando o método de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\left(y''(t) + 4y(t)\right) = \mathcal{L}\left(y''(t)\right) + 4\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(u_2(t));$$
$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \mathcal{L}(u_2(t)).$$

(Vale mais 0,3 pontos até aqui.)

Assim, usando a tabela e os dados iniciais, obtemos que

$$(s^2+4)Y(s) + 2 = \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s},$$

(Vale mais 0,1 pontos até aqui.)
logo

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s^2+4)} - \frac{2}{s^2+4}.$$

Mas

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+4)}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t\,,$$

pois usando frações parciais temos que $\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1/4}{s} - \frac{(1/4)s}{s(s^2+4)}$.
(Vale mais 0,7 pontos até aqui.)
Usando novamente a Tabela e o que fizemos acima, concluimos que

$$\boxed{y(t) = -\operatorname{sen} 2t + u_2(t)\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cos 2(t-2)\right)}\,.$$

(Vale mais 0,7 pontos até aqui.)

Questão 3.

3a) A equação dada $x^2y''+x(x-1/2)y'+1/2y = 0$ é da forma $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y = 0$. No ponto $x_0 = 0$, temos que $P(0) = 0$ sem que P, Q e R tenham fatores comuns, e conseqüentemente o ponto $x_0 = 0$ é um ponto singular. Sejam então

$$p(x) = Q(x)/P(x) = (x-1/2)/x, \quad q(x) = R(x)/P(x) = 1/(2x^2)\,.$$

Então os limites

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = -1/2, \quad \lim_{x\to 0} x^2q(x) = 1/2$$

existem, e o ponto $x_0 = 0$ é um ponto singular regular. **0,2 pontos até aqui**

A equação indicial é $r(r-1) - 1/2r + 1/2 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = 1/2$. **mais 0,2 pontos até aqui**

A teoria de Frobenius diz que as soluções são da forma

$$y(x) = ax\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + bx^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\,,$$

já que as raízes são reais e não diferem num inteiro. **mais 0,2 pontos até aqui**

Tomando $a = 1$ e $b = 0$ temos que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$ é uma solução que é uma série de potências, que converge em todo $\mathbb{R}$ já que $xp(x)$ e $x^2q(x)$ são polinômios. **mais 0,15 pontos até aqui**

b) Tentemos encontrar as relações de recorrência, supondo $y(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$. Temos

$$\begin{aligned}
1/2y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 1/2\, c_n x^{n+1}\,, \\
x(x-1/2)y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} -1/2(n+1)c_n x^{n+1}\,, \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n c_{n-1} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} -1/2(n+1)c_n x^{n+1}\,, \\
x^2 y''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n c_n x^{n+1}
\end{aligned}$$

0,1 pontos até aqui

Arrumando os coeficentes, fica

$$0 = c_0/2 - c_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}[c_n(n(n+1) - 1/2(n+1) + 1/2) + n c_{n-1}]x^{n+1}$$

e então c_0 é arbitrário e a relação de recorrência fica, para $n \geq 1$,

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n+1/2}$$

mais 0,3 pontos até aqui

Tomando $c_0 = 1$, fica $c_1 = -2/3$, $c_2 = -2/5c_1 = 4/15$, e os três primeiros termos da solução são

$$y(x) = x - 2/3x^2 + 4/15x^3 + \dots$$

mais 0,35 pontos até aqui

c) As soluções são da forma $y(x) = ax\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + bx^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, onde $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ são séries de potências convergentes em todo $\mathbb{R}$, que é o intervalo onde convergem $xp(x)$ e $x^2q(x)$, que são simples polinômios. Então qualquer solução é da forma

$$y(x) = axS(x) + bxT(x),$$

onde $S(x)$ e $T(x)$ são funções contínuas em todo $\mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} y(x) &= \lim_{x\to 0^+} axS(x) + bxT(x) \\
&= a \lim_{x\to 0^+} x \lim_{x\to 0^+} S(x) + b \lim_{x\to 0^+} x^{1/2} \lim_{x\to 0^+} T(x) \\
&= a\cdot 0\cdot S(0) + b\cdot 0\cdot T(0) = 0\,.
\end{aligned}$$

Questão 4

$$y'' + 2y' + y = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1.$$

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \implies (r+1)^2 = 0 \implies r = r_1 = r_2 = -1.$$

0,2 pontos até aqui ——————————————-

$$y(t) = C_1 \,\mathrm{e}^{-t} + C_2 t \,\mathrm{e}^{-t}.$$

Mais 0,4 pontos até aqui ——————————————

$$y(0) = 0 \implies C_1 = 0 \implies y(t) = C_2 t \,\mathrm{e}^{-t},$$

$$y'(t) = C_2 \,\mathrm{e}^{-t} - C_2 t \,\mathrm{e}^{-t} = C_2 e \hat{-} t(1-t),$$

$$y^{'}(0) = 1 \implies C_2 = 1.$$

Mais 0,3 pontos até aqui ——————————————

$$y(t) = te^{-t}.$$

Mais 0,1 pontos até aqui ——————————————

(b)

$$t\frac{dy}{dt} = y^2, \;\; t > 0 \;\; y \neq 0 \implies \frac{dy}{y^2} = \frac{dt}{t}.$$

Mais 0,4 pontos até aqui ——————————————

$$-\frac{1}{y} = \ln t + C.$$

Mais 0,4 pontos até aqui ——————————————

$$y = -\frac{1}{\ln t + C}.$$

Mais 0,2 pontos até aqui ——————————————