Exame de Cálculo III - MA311
1o. Semestre de 2013 - Vespertino

Q	Notas
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
$\sum$	

Nome:____

R.A.:____________________ **Turma**:__________________

Todas as questões valem 2,0 pontos.

Questão 1. (a) Resolva a equação $y' + 10y = 5x$.

(b) Resolva o problema de valor inicial $y' - 5y = -\dfrac{5}{2}xy^3, \quad y(0) = 1.$

Questão 2. (a) Calcule a convolução de $f(t) = 2t$ e $g(t) = \operatorname{sen} 2t$.

(b) Dado que $F(s) = \dfrac{2}{s^2(s^2+4)}$ é a transformada de Laplace de f ($f = \mathcal{L}^{-1}[F]$), calcule $\mathcal{L}[f']$ e $\mathcal{L}[f'']$, sendo $f(0) = 3$ e $f'(0) = -1$.

(c) Resolva o problema de valor inicial $y'' + 4y = 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Questão 3. (a) Usando o método de autovalores e autovetores, determine a solução geral real do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(b) Usando o método de variação dos parâmetros, encontre uma solução particular de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^{-2} \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

sabendo que $\mathbf{x}^1 = \binom{1}{2}$ e $\mathbf{x}^2 = \binom{t}{2t-1/2}$ são soluções linearmente independentes do sistema homogênio associado (no intervalo $t > 0$).

Questão 4. Considere a equação $6x^2y'' + 7xy' - (x^2+2)y = 0.$

(a) Justifique que as funções

$$p(x) = 7/(6x) \quad \text{e} \quad q(x) = -(x^2+2)/(6x^2)$$

são analíticas em $x_0 = 2$ e conclua que $x_0 = 2$ é ponto ordinário.

(b) Mostre que os raios de convergência das séries de Taylor de p e q em torno de $x_0 = 2$ é igual a 2.

(c) Mostre que $x_0 = 0$ não é um ponto ordinário mas é um ponto singular regular.

(d) Determine a equação indicial em $x_0 = 0$, calcule as suas raízes, e dê a forma de duas soluções linearmente independentes em série de Frobenius, em torno de $x_0 = 0$.

Questão 5. Seja f a função ímpar, periódica de período 2π e tal que $f(x) = \pi - x$ se $0 \leq x \leq \pi$.

(a) Encontre a série de Fourier de f.

(b) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$

Gabarito

Questão 1. (a) *Resolva a equação* $y' + 10y = 5x$.

Fator integrante: $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int 10\,dx} = \mathrm{e}^{10x}$ **0,2**

$\therefore \quad (\mathrm{e}^{10x}y)' = 5x\mathrm{e}^{10x}$ **0,2**

$\mathrm{e}^{10x}y = 5\int x\mathrm{e}^{10x}\,dx$ **0,2**

$= 5\left(x\frac{\mathrm{e}^{10x}}{10} - \frac{\mathrm{e}^{10x}}{10^2}\right) + c$ (integração por partes) **0,2**

$\therefore \quad y = 5\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{20} + c\,\mathrm{e}^{-10x}$ **0,2**

(b) *Resolva o problema de valor inicial* $y' - 5y = -\dfrac{5}{2}xy^3, \quad y(0) = 1.$

Equação de Bernoulli, $n = 3$; substituição: $v = y^{1-n} = y^{-2}$ **0,3**

$y = v^{-1/2}, \quad y' \equiv \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}v^{-3/2}\frac{dv}{dx}.$

Daí, a equação fica

$-\frac{1}{2}v^{-3/2}\frac{dv}{dx} - 5v^{-1/2} = -\frac{5}{2}xv^{-3/2}$

$\frac{dv}{dx} + 10v^{(-1/2)+(3/2)} = 5x$

$\frac{dv}{dx} + 10v = 5x$ **0,3**

Daí, pelo item (a) vem que $v = 5\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{20} + c\,\mathrm{e}^{-10x}$, logo,

$y^{-2} = 5\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{20} + c\,\mathrm{e}^{-10x}$

$y = \pm 1\Big/\sqrt{5\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{20} + c\,\mathrm{e}^{-10x}}$

0,2

Impondo a condição inicial, obtemos:

$1 = 1\Big/\sqrt{-\dfrac{1}{20} + c}, \quad -\dfrac{1}{20} + c = 1, \quad c = 1 + 1/20 = 21/20.$

0,2

Portanto, a solução é $y = 1\Big/\sqrt{5\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{20} + \dfrac{21}{20}\,\mathrm{e}^{-10x}}.$

Questão 2. (a) *Calcule a convolução de* $f(t) = 2t$ *e* $g(t) = \operatorname{sen} 2t$.

$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

$= \int_0^t 2(t-\tau)\operatorname{sen}(2\tau)\,d\tau$ **0,1**

$= 2t\int_0^t \operatorname{sen} 2\tau\,d\tau - 2\int_0^t \tau\operatorname{sen}(2\tau)\,d\tau$ **0,1**

$= -t\cos 2\tau\Big|_{\tau=0}^{t=\tau} - 2\left(-\frac{1}{2}\tau\cos(2\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\tau)\,d\tau\right)$ **0,1**

$= -t\cos 2t + t + t\cos 2t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\tau\Big|_0^t$ **0,1**

$= \quad t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$ **0,1**

(b) *Dado que* $F(s) = \dfrac{2}{s^2(s^2+4)}$ *é a transformada de Laplace de* f *(* $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$ *), calcule* $\mathcal{L}[f']$ *e* $\mathcal{L}[f'']$*, sendo* $f(0) = 3$ *e* $f'(0) = -1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] &= s\mathcal{L}[f] - f(0) && \textbf{0,1} \\ &= s\frac{2}{s^2(s^2+4)} - 3 = \frac{2}{s(s^2+4)} - 3 && \textbf{0,2} \\ \mathcal{L}[f''] &= s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0) && \textbf{0,1} \\ &= \frac{2}{s^2+4} - 3s + 1 && \textbf{0,2} \end{aligned}$$

(c) *Resolva o problema de valor inicial* $y'' + 4y = 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}[y'' + 4y] = \mathcal{L}[2t] \\ &\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2} && \textbf{0,2} \\ &s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2} \\ &(s^2+4)\mathcal{L}[y] - s = \frac{2}{s^2} && \textbf{0,2} \\ &\mathcal{L}[y] = \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2(s^2+4)} \\ &\quad y = \mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+4}] + \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}\frac{2}{s^2+4}] \\ &\quad\;\; = \cos 2t + \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}] * \mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s^2+4}] && \textbf{0,2} \\ &\quad\;\; = \cos 2t + (f * g)(t), \qquad f(t) = t, \quad g(t) = \operatorname{sen} 2t && \textbf{0,2} \\ &\quad\;\; = \cos 2t + \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}, \qquad \text{onde usamos o item (a).} && \textbf{0,2} \end{aligned}$$

Questão 3. (a) *Usando o método de autovalores e autovetores, determine a solução geral real do sistema*

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

<u>Autovalores</u>:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (1-\lambda)^2 = 4, \qquad (1-\lambda)^2 = -4, \qquad 1-\lambda = \sqrt{-4} = \pm 2i,$$

$$\boxed{\lambda = 1 \pm 2i}. \qquad \textbf{0,2}$$

<u>Autovetores</u>, $V = (\alpha, \beta)$:

$$\begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -2 \\ 2 & 1-(1+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad 2\alpha - 2i\beta = 0, \qquad \alpha = \beta i, \qquad V = (i, 1).$$

0,2

<u>‘Solução complexa’</u>:

$$e^{(1+2i)t}V = e^t e^{2it}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} i\cos 2t - \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t + i \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + i\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$$

0,2

Conjunto (real) fundamental de soluções:

$$\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$$

0,2

Solução (real) geral:

$$\mathbf{x} = c_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$$

0,2

(b) *Usando o método de variação dos parâmetros, encontre uma solução particular de*

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^{-2} \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

sabendo que $\mathbf{x}^1 = \binom{1}{2}$ *e* $\mathbf{x}^2 = \binom{t}{2t-1/2}$ *são soluções linearmente independentes do sistema homogênio associado (no intervalo $t > 0$).*

Matriz fundamental:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 & \mathbf{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t - 1/2 \end{pmatrix}.$$

0,2

Forma de uma solução particular, $\mathbf{x}_P$:

$$\mathbf{x}_P = \Psi(t)\mathbf{u}, \qquad \Psi(t)\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} 0 \\ t^{-2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$ **0,2**

Determinação de $\mathbf{u}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t - 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t^{-2} \end{pmatrix}$$

$$u_1' + tu_2' = 0, \quad u_1' = -tu_2'.$$ **0,1**

$$2u_1' + (2t - 1/2)u_2' = t^{-2}, \quad -2tu_2' + (2t - 1/2)u_2' = t^{-2}, \quad u_2' = -2t^{-2},$$

$$u_2 = -2\int t^{-2}dt = 2t^{-1} \quad (+ c).$$ **0,2**

$$u_1' = -t(-2t^{-2}) = 2t^{-1}, \quad u_1 = 2\int t^{-1}dt = 2\ln t \quad (+ c).$$ **0,1**

Uma solução particular:

$$\mathbf{x}_P = \Psi(t)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t - 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\ln t \\ 2t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ln t + 2 \\ 4\ln t + 4 - t^{-1} \end{pmatrix}.$$ **0,2**

Questão 4. *Considere a equação* $\quad 6x^2y'' + 7xy' - (x^2+2)y = 0.$

(a) *Justifique que as funções*

$$p(x) = 7/(6x) \quad e \quad q(x) = -(x^2+2)/(6x^2)$$

são analíticas em $x_0 = 2$ *e conclua que* $x_0 = 2$ *é ponto ordinário.*

Essas são funções racionais (quociente de polinômios) e seus denominadores, $6x$ e $6x^2$ não se anulam em $x_0 = 2$, logo são analíticas em $x_0 = 2$, conforme a teoria vista (v. §5.3 do livro-texto). **0,2**

Portanto, $x_0 = 2$ é um ponto ordinário, pela definição de ponto ordinário. **0,1**

(b) *Mostre que os raios de convergência das séries de Taylor de* p *e* q *em torno de* $x_0 = 2$ *é igual a* 2.

Também pela teoria, quando a função é racional com denominador não se anulando em x_0, a série de potências da função em torno de x_0, a qual coincide com a série de Taylor, tem raio de convergência igual a menor distância de x_0 às raízes do denominador. No caso em questão, os denominadores só têm a raiz 0 (zero), logo, o raios de convergência são o mesmo e é igual a $|x_0 - 0| = |2-0| = 2$. **0,2**

(c) *Mostre que* $x_0 = 0$ *não é um ponto ordinário mas é um ponto singular regular.*

Como não existe o limite $\lim_{x\to 0} p(x) = \lim_{x\to 0} 7/(6x)$ $(=\pm\infty)$, a função p não pode ser analítica em $x_0 = 0$. Daí, concluímos (em particular) que $x_0 = 0$ não é ponto ordinário. No entanto, ao multiplicarmos p por $x - x_0 = x$ e q por $(x-x_0)^2 = x^2$, obtemos as funções

$$xp(x) = 7/6 \quad \text{e} \quad x^2q(x) = -(x^2+2)/6 = -\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{3}$$

as quais são polinomiais, em particular analíticas (em qualquer ponto). Portanto, pela definição, $x_0 = 0$ é um ponto singular regular. **0,3**

(d) *Determine a equação indicial em* $x_0 = 0$, *calcule as suas raízes, e dê a forma de duas soluções linearmente independentes em série de Frobenius, em torno de* $x_0 = 0$.

Equação indicial:

$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$, $\quad p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} 7/6 = 7/6$, $\quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0}\left[-\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{3}\right] = -1/3 \quad \therefore \quad r(r-1) + \tfrac{7}{6}r - \tfrac{1}{3} = 0,\quad \boxed{r^2 + (r/6) - (1/3) = 0}$. **0,3**

Raízes:

$\tfrac{1}{2}[(-1/6) \pm \sqrt{(1/6)^2 - 4(-1/3)}] = \tfrac{1}{2}[(-1/6) \pm \sqrt{(1+48)/36}] = \tfrac{1}{2}[(-1/6) \pm (7/6)] = \begin{cases} 1/2 \\ -2/3 \end{cases}.$ **0,2**

Soluções linearmente independentes:

$$y_1 = x^{1/2}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n\Big), \quad y_2 = x^{-2/3}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_nx^n\Big), \quad x > 0.$$ **0,6**

$$y_1 = |x|^{1/2}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n\Big), \quad y_2 = |x|^{-2/3}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_nx^n\Big), \quad x \neq 0.$$ **0,1**

Questão 5. *Seja f a função ímpar, periódica de período 2π e tal que $f(x) = \pi - x$ se $0 \leq x \leq \pi$.*

(a) *Encontre a série de Fourier de f.*

Série de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx.$$

0,3

Como a função é ímpar, $a_n = 0, \quad \forall\, n$. **0,2**

Para os coeficientes b_n, considerando também que a função é ímpar, temos:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$ **0,1**

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen} nx\, dx = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx$$

$$= -\frac{2}{n} \cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{1}{n} x \cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx\, dx\Big) \qquad \text{(integração por partes)}$$

0,3

$$= \frac{2}{n}(1 - (-1)^n) - \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nx\Big|_0^{\pi}\Big) = \frac{2}{n}(1 - (-1)^n) + \frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}$$

0,3

Portanto, a série de Fourier de f é a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen} nx$.

(b) *Mostre que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.

Tomando $x = \pi/2$ temos que, pelo Teorema de Fourier, a série acima converge para $f(\pi/2) = \pi - (\pi/2) = \pi/2$, visto que $\pi/2$ é um ponto de continuidade de f. **0,3**

Por outro lado, calculando a série nesse ponto, e levando em conta que $\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}$ é igual a zero para n par e $(-1)^{m+1}$ para $n = 2m - 1$, **0,2**
temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$ **0,2**

Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{2}$, logo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$. **0,1**