DM–IMECC–UNICAMP – Cálculo III - MA311 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **Exame, 12/12/2011**

Aluno: ______________________________ RA: ____________

Assinatura - igual à do RG: __________________________________

Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico Desligue o celular!
Não destaque o grampo da prova.

Questão 1. (1,5 pontos) Resolva a equação $xdy + (\frac{x^2}{1+x^2} - y)dx = 0$. *Sugestão*: escreva a equação como uma equação diferencial 'linear' de 1a. ordem não-homogênea.

2. (2,0) Determine a forma de uma solução particular da equação

$$y'' - 4y' + 4y = t(\operatorname{sen} 2t + \mathrm{e}^{2t}),$$

dada pelo método dos coeficientes indeterminados. (*Não precisa calcular.*)

3. a) (0,5) Escreva a transformada de Laplace inversa da função
$F(s) = \dfrac{1}{s(s-2)^2}$ como um produto de convolução.

b) (1,5) Resolva o problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 4y = u_\pi(t), \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 2$$

usando a transformada de Laplace.

4. (2,0) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Dado que os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, sendo λ_1 com multiplicidade 2, e que os únicos autovetores associados, a menos de constante multiplicativa, são respectivamente
$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ e $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, resolva o sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

5. (2,0) Dado que $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $-\infty < x < \infty$, mostre que $x = 0$ **não é** um ponto ordinário e que é um ponto singular regular para a equação

$$xy'' + (\cos x)y' + y = 0.$$

Dê a forma de duas soluções linearmentes no intervalo $(0, \infty)$. (*Não precisa calcular.*)

6. (2,0) Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{se } -\pi < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \le \pi, \end{cases}$$

periódica com período 2π, é uma função seccionalmente contínua e calcule a sua série de Fourier (com período 2π). Explicite a série no ponto $x = 0$ e daí, usando o Teorema de Fourier, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.

Não esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova.

GABARITO

Questão 1. (1,5 pontos) *Resolva a equação* $xdy + (\frac{x^2}{1+x^2} - y)dx = 0$. Sugestão*: escreva a equação como uma equação diferencial 'linear' de 1a. ordem não-homogênea.*

$x\frac{dy}{dx} + (\frac{x^2}{1+x^2} - y) = 0$

$xy' - y = -\frac{x^2}{1+x^2}$ **0,1 pontos** até aqui

$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{x}{1+x^2}$

Fator integrante: $\mu = \mathrm{e}^{\int(-\frac{1}{x})dx} = \mathrm{e}^{-\ln|x|\ \ (+c)} = \mathrm{e}^{\ln|x|^{-1}} = |x|^{-1} = \pm\frac{1}{x}$ **+ 0,4**

$\mu y' - \mu\frac{1}{x}y = -\mu\frac{x}{1+x^2}$

$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\frac{1}{x}y)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$\int(\frac{1}{x}y)'dx = -\int\frac{1}{1+x^2}dx$ **+ 0,5**

$= -\arctan x\ (+c)$ **+ 0,2**

$\frac{1}{x}y = -\int\frac{1}{1+x^2}dx + c$

$\boxed{y = -x\int\frac{1}{1+x^2}dx + cx}$ **+ 0,3**

2. (2,0) *Determine a forma de uma solução particular da equação*

$$y'' - 4y' + 4y = t(\operatorname{sen} 2t + \mathrm{e}^{2t}),$$

dada pelo método dos coeficientes indeterminados. (*Não precisa calcular.*)

Solução da equação homogênea $L[y] \equiv y'' - 4y' + 4y = 0$:

Equação característica: $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$;
raíz: $r = 2$, multiplicidade 2. **0,2**
CFS: $y_1 = \mathrm{e}^{2t}$, $y_2 = t\,\mathrm{e}^{2t}$

Solução particular da equação $L[y] = t\operatorname{sen} 2t \equiv P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$, $P(t) = t$, $\alpha = 0, \beta = 2$:

$\alpha + i\beta = 2i$ não é raiz da equação característica, logo, a solução particular desta equação é da forma $y = (A + Bt)\cos 2t + (C + Dt)\operatorname{sen} 2t$ **0,8**

Solução particular da equação $L[y] = t\,\mathrm{e}^{2t} \equiv P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$, $P(t) = t$, $\alpha = 2, \beta = 0$:

$\alpha + i\beta = 2$ é raiz da equação característica, logo, a solução particular desta equação é da forma $y = t^s(A + Bt)\,\mathrm{e}^{2t}$, em que $s = 2$ é a multiplicidade de $\alpha + i\beta = 2$ como raiz da equação característica. **0,8**

Solução particular da equação dada:

$\boxed{y = (A + Bt)\cos 2t + (C + Dt)\operatorname{sen} 2t + t^2(E + Ft)\,\mathrm{e}^{2t}}$. **+ 0,2**

3. a) (0,5) *Escreva a transformada de Laplace inversa da função* $F(s) = \dfrac{1}{s(s-2)^2}$ *como um produto de convolução.*

$F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{(s-2)^2}$

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} * \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-2)^2}\}$ **0,1**

$= \int_0^t \left(\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}\right)(t-\tau)\left(\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-2)^2}\}\right)(\tau)\,d\tau$ **+ 0,2**

$= \int_0^t 1 \cdot \mathrm{e}^{2\tau}\,\tau\,d\tau = \int_0^t \tau\,\mathrm{e}^{2\tau}\,d\tau$ **+ 0,2**

b) (1,5) *Resolva o problema de valor inicial*

$$y'' - 4y' + 4y = u_\pi(t), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

usando a transformada de Laplace.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 4y' + 4y\} &= \mathcal{L}\{u_\pi(t)\} \\ &= \tfrac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s} \end{aligned}$$

0,1

$$(s^2 - 4s + 4)\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4y(0) = \tfrac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s}$$

+ 0,2

$$\begin{aligned} (s-2)^2\mathcal{L}\{y\} - s + 2 &= \tfrac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s} \\ \mathcal{L}\{y\} &= \tfrac{1}{s-2} + \tfrac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s(s-2)^2} \end{aligned}$$

+ 0,2

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s-2}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s(s-2)^2}\} \\ &= \mathrm{e}^{2t} + u_\pi(t)\mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s(s-2)^2}\}(t-\pi) \end{aligned}$$

+ 0,5

<u>Cálculo de</u> $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s-2)^2}\}$:

Como no item **a)**, $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s-2)^2}\} = \int_0^t \tau\,\mathrm{e}^{2\tau}\,d\tau$ **+ 0,3**

$= \left[\frac{1}{2}\tau\,\mathrm{e}^{2\tau} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2\tau}\right]\Big|_0^t$ (integração por partes: $u = \tau,\ dv = \mathrm{e}^{2\tau}$)

$= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}(t + \frac{1}{2}) - \frac{1}{4}$. **+ 0,2**

4. (2,0) *Seja* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Dado que os autovalores de A *são* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 2$*, sendo* λ_1 *com multiplicidade 2, e que os únicos autovetores associados, a menos de constante multiplicativa, são respectivamente* $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ e $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, *resolva o sistema* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ *(ache a solução geral).*

Pelos dados,

$$\mathbf{x}^1 = \mathrm{e}^t\, V_1 = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{x}^2 = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

são duas soluções linearmente independentes. **0,8**

<u>Terceira solução $\mathbf{x}^3$</u> tal que $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ seja LI (forme um CFS):

Como $\lambda_1 = 1$ é um autovalor de multiplicidade 2 com apenas um autovetor LI,

$$\mathbf{x}^3 = t\,\mathrm{e}^t\, V_1 + \mathrm{e}^t\, V_3$$

em que V_3 é uma solução do sistema linear algébrico

$$(A - 1)V_3 = V_1.$$

+ 0,4

Escrevendo $V_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

+ 0,4

$$-4a = 0, \quad 3a + 6b + c = -6$$
$$a = 0, \quad 6b + c = -6;$$

tomando $c = 0$, obtemos $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A solução geral é $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + c_3\mathbf{x}^3$. **+ 0,4**

5. (2,0) *Dado que* $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$*,* $-\infty < x < \infty$*, mostre que* $x = 0$ **não é** *um ponto ordinário e que é um ponto singular regular para a equação*

$$xy'' + (\cos x)y' + y = 0.$$

Dê a forma de duas soluções linearmentes no intervalo $(0, \infty)$*. (*Não precisa calcular.*)*

$y'' + py' + qy = 0, \quad p = \frac{\cos x}{x}, \quad q = \frac{1}{x}.$

$q = \frac{1}{x}$ não é uma função analítica em $x = 0$ (não pode ser escrita como uma série de potências em torno de $x = 0$), haja vista que não existe $\lim_{x \to 0} q$ $(= \infty)$. Então $x = 0$ não é um ponto ordinário. **0,2**

$xp = \cos x$ é uma função analítica em $x = 0$ (se escreve como uma série de potências em torno de $x = 0$; esta informação foi dada) e $x^2 q$ também é uma função analítica em $x = 0$, pois $x^2 q = x$ é uma função polinomial.

Então $x = 0$ é um ponto singular regular. + **0,4**

<u>Equação indicial $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ e raízes:</u>

$p_0 = \lim_{x \to 0} xp = \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$; $q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q = \lim_{x \to 0} x = 0$. Logo, a equação indicial é

$$r^2 = 0.$$

Raízes: $r_1 = r_2 = 0$. + **0,4**

<u>Forma das soluções</u>: Sendo as raízes iguais $r_1 = r_2 = 0$, pela teoria (pelo Teorema de Frobenius) temos duas soluções LI da forma:

$$y_1 = x^{r_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

+ **0,4**

e

$$y_2 = y_1 \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

+ **0,4**

Ainda pelo Teorema de Frobenius, os raios de convergência das séries de potências nessas soluções é pelo menos igual ao menor dos raios de convergência das séries de potências de xp e $x^2 q$ em torno de $x = 0$. Como $xp = \cos x$ se escreve como uma série de potências em torno de $x = 0$ definida em toda a reta (raio de convergência infinito) e $x^2 q = x$ é um uma função polinomial (raio de convergência obviamente infinito; soma finita) segue-se que as soluções acima estão definidas no intervalo $(0, \infty)$. + **0,2**

6. (2,0) *Mostre que a função*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & se \ -\pi < x < \frac{\pi}{2} \ ou \ \frac{\pi}{2} < x \le \pi, \end{cases}$$

periódica com período 2π, é uma função seccionalmente contínua e calcule a sua série de Fourier (com período 2π). Explicite a série no ponto $x = 0$ e daí, usando o Teorema de Fourier, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.

Os únicos pontos de descontinuidade no intervalo $(-\pi, \pi]$ (um intervalo de comprimento igual ao período) são os pontos $x = -\pi/2, \pi/2, \pi$, já que a função é uma constante em cada um dos intervalos abertos $(-\pi, -\pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2)$ e $(\pi/2, \pi)$. Além disso, nesse pontos de descontinuidades existem os limites laterais

$\lim_{x \to -\pi/2-} f(x) = \lim_{x \to -\pi/2-} 0 = 0, \qquad \lim_{x \to -\pi/2+} f(x) = \lim_{x \to \pi/2+} 1 = 1,$

$\lim_{x \to \pi/2-} f(x) = \lim_{x \to \pi/2-} 1 = 1, \qquad \lim_{x \to \pi/2+} f(x) = \lim_{x \to \pi/2+} 0 = 0$ e

$\lim_{x \to \pi\pm} f(x) = \lim_{x \to \pi\pm} 0 = 0.$

Então a função é seccionalmente contínua (v. a definição). **0,2**

<u>Série de Fourier</u>

$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$, $\quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $\quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$, $\ n = 1, 2 \cdots$ **:**

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx = 1$$

+ 0,2

$$\begin{aligned} a_n = & \ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx \, dx = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} nx \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{n\pi} (\operatorname{sen} n\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen}(-n\tfrac{\pi}{2})) = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} n\tfrac{\pi}{2} \\ = & \begin{cases} \frac{2(-1)^{k-1}}{n\pi}, & \text{se } n = 2k-1 \text{ é impar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \end{aligned}$$

+ 0,4

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} nx \, dx = -\frac{1}{n\pi} \cos nx \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{1}{n\pi} (\cos n\tfrac{\pi}{2} - \cos(-n\tfrac{\pi}{2})) = 0.$$

+ 0,4

Série de Fourier: $\quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \cos(2n-1)x \, .$ **+ 0,4**

Como a função e também a sua derivada (a qual existe exceto nos pontos de descontinuidade da função) são funções seccionalmente contínuas, pelo Teorema de Fourier, tomando $x = 0$ temos

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{f(0+) + f(0-)}{2} = f(0) = 1$$

visto que a função é contínua em $x = 0$. **+ 0,2**

Daí vem que $\quad \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}, \quad$ logo, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \, .$ **+ 0,2**