

Questão 1.

(a)

Usando a sugestão:

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$$
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x^2| < 1 \quad (\Leftrightarrow |x| < 1) \quad (\text{série geométrica, 'com } -(x^2) \text{ no lugar de } x')$$

0, 2 pontos até aqui

$$\therefore \frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+(x/\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2n}, \quad |x/\sqrt{3}| < 1 \quad (\Leftrightarrow |x| < \sqrt{3})$$
$$\therefore g'(x) = \frac{2x}{x^2+3} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} x^{2n+1}, \quad |x| < \sqrt{3};$$

+ 0, 3

integrando de 0 a x , obtemos:

$$g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t) dt = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{3^n} t^{2n+1} dt$$
$$= \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+2)} x^{2n+2}$$

+ 0, 3

$$\ln(x^2 + 3) = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)} x^{2n+2}, \quad |x| < \sqrt{3}$$

+ 0, 2

Outra maneira:

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+x/3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} x^n, \quad |x/3| < 1 \quad (\Leftrightarrow |x| < 3)$$

(série geométrica, 'com $-x/3$ no lugar de x ') **0,2**

Integrando de 0 a x , obtemos:

$$\int_0^x \frac{1}{t+3} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n dt$$
$$\ln(t+3) \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x$$
$$\ln(x+3) - \ln 3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)} x^{n+1}, \quad |x| < 3;$$

+ 0, 4

substituindo x por x^2 ,

$$\ln(x^2 + 3) - \ln 3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)} x^{2n+2}, \quad |x^2| < 3 \quad (\Leftrightarrow |x| < \sqrt{3})$$

+ 0, 2

(b)

Uma maneira: Suponhamos que $x = 0$ seja um ponto ordinário. Então a equação se escreve como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

sendo p e q funções analíticas em $x = 0$.

0,4 até aqui

Em particular, são funções contínuas num intervalo aberto I contendo $x = 0$. Por outro lado, as funções y_1 e y_2 dadas são L.I. (em qualquer subconjunto de \mathbb{R} , diferente de $\{0\}$). Com efeito, o wronskiano de y_1 e y_2 vale

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} 3x^3 & 5x^5 \\ 9x^2 & 25x^4 \end{vmatrix} = 75x^7 - 45x^7 \neq 0, \quad \forall x \neq 0.$$

+ 0, 3

Então $\{y_1, y_2\}$ é um CFS em I . Mas $W[y_1, y_2] = 0$ em $x = 0$: contradição, pois sabemos que, nas condições acima, se o wronskiano se anular num ponto de um intervalo então anula-se em todos

os pontos. Logo, $x = 0$ não pode ser um ponto ordinário. Então, é singular (pela definição de ponto singular). + 0, 3

Outra maneira: Substituindo as soluções dadas y_1 e y_2 na equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad p = Q/P, \quad q = R/P,$$

temos:

$$\begin{aligned} 18x + p9x^2 + q3x^3 &= 0 \\ \div 3x : \quad 6 + p3x + qx^2 &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 100x^3 + p25x^4 + q5x^5 &= 0 \\ \div 5x^3 : \quad 20 + p5x + qx^2 &= 0. \end{aligned}$$

Então,

$$p(x) = \frac{\begin{vmatrix} -6 & x^2 \\ -20 & x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3x & x^2 \\ 5x & x^2 \end{vmatrix}} = \frac{-6x^2 + 20x^2}{3x^3 - 5x^3} = \frac{14x^2}{-2x^3} = -\frac{7}{x}$$

0,2 até aqui

$$\therefore \nexists \lim_{x \rightarrow 0} p(x) \quad (= \infty)$$

+ 0, 4

Logo, $p(x)$ não pode ser analítica em $x = 0$. Logo, $x = 0$ não é um ponto ordinário, i.e. é singular. + 0, 4

Questão 2.

(a) $p(x) = \frac{1}{x}$ não é analítica em $x = 0$, pois e.g. $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} p(x) (= \infty)$. Logo $x = 0$ é singular. 0, 2

$xp(x) = 1$ polinômio, função analítica;

$x^2q(x) = x^2(\frac{5x^2}{x^2}) = 5x^2$: idem

+ 0, 2

$\therefore x = 0$ é um ponto singular regular.

+ 0, 1

(b)

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 5x^2 = 0$$

0, 2

$$\therefore F(r) \equiv r(r-1) + p_0r + q_0 = r(r-1) - r = r^2$$

+ 0, 1

Equação indicial: $r^2 = 0$

Raízes: $r_1 = r_2 = 0$.

+ 0, 2

(c)

$$y = |x|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad r = r_1 = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

0, 5

Derivando e substituindo na equação, temos:

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 5x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

+ 0, 1

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

+ 0, 1

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 5 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

+ 0, 1

$$a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n(n-1) + n) a_n + 5a_{n-2}] x^n = 0$$

+ 0, 1

$$a_1 = 0, \quad n^2 a_n + 5a_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

+ 0, 1

$$\boxed{a_n = -\frac{5a_{n-2}}{n^2}}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad a_1 = 0$$

relação de recorrência

+ 0, 1

$a_1 = 0 \Rightarrow a_n = 0$ para n ímpar

+ 0, 1

n par:

$$a_2 = -\frac{5a_0}{2^2}$$

$$a_4 = \frac{5a_2}{4^2} = \frac{5^2 a_0}{4^2 2^2}$$

$$a_6 = \frac{5a_4}{6^2} = -\frac{5^3 a_0}{6^2 4^2 2^2}$$

+ 0, 1

\vdots

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n 5^n a_0}{(2n)^2 (2(n-1))^2 \dots 4^2 2^2}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n 5^n a_0}{2^{2n} (n!)^2}$$

+ 0, 1

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$$

+ 0, 1

(tomamos $a_0 = 1$).

Questão 3.

(a) Para x no intervalo $[-2, 0)$ defina

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ -x, & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases} .$$

Estenda f a toda a reta \mathbb{R} definindo f de tal forma que $f(x+4) = f(x)$. + 0, 3

Observe que sendo a extensão de f uma função par, sua série de Fourier é uma série de cossenos, ou seja, $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Vamos então calcular os a_n : Como o período é 4 temos $L = 2$. Assim,

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

+ 0, 2

Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^1 x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \Big|_0^1 \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

+ 0, 4

Logo, a série de Fourier da extensão de f é dada por

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right) \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

+ 0, 3

(b) Primeiro observe que tanto f quanto f' são funções seccionalmente contínuas. Agora, como a função f estendida é contínua em $x = 0$, pelo Teorema da convergência de Fourier temos que a série, em $x = 0$, converge para $f(0) = 0$ (+ 0, 2). Por outro, como a função f é descontínua em $x = 1$, novamente pelo Teorema da convergência de Fourier, a série, em $x = 1$, converge para

$$\frac{f(1+) + f(1-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

+ 0, 3

(c) Por (b), temos

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Observe que se $n = 2k - 1$ então $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$. Portanto, podemos reescrever

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k\pi} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{2}\right) + \frac{2}{2k\pi} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right) - 1 \right) \right) \cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right) &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \left(\operatorname{sen}(k\pi) + \frac{1}{k\pi} \left(\cos(k\pi) - 1 \right) \right) \cos(k\pi) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k\pi}\right)^2 (\cos(k\pi) - 1) \cos(k\pi) = \frac{1}{4}$$

+ 0,3

Como $\cos(k\pi) = 1$ se k é par e $\cos(k\pi) = -1$ se k é ímpar, obtemos (escrevendo $k = 2n - 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{(2n-1)\pi}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

+ 0,2

Questão 4. (a) Suponha que a equação possua uma solução de variáveis separadas da forma $u(x, y) = F(x)G(y)$. Derivando u duas vezes em relação a x , duas vezes em relação a y e substituindo na equação obtemos

$$F''(x)G(y) + xyG''(y) = 0.$$

+ 0,2

Dividindo por $xG(y)$, chegamos à relação

$$\frac{F''(x)}{xG(y)} = -\frac{yG''(y)}{G(y)} = \lambda$$

+ 0,2

onde λ é uma constante. As relações acima imediatamente implicam nas equações

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda xF(x) = 0 \\ yG''(y) + \lambda G(y) = 0. \end{cases}$$

+ 0,2

Afirmamos que vale o princípio da superposição para esta equação. De fato, sejam v e w soluções da equação. Então para $u = c_1v + c_2w$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, temos

$$\begin{aligned} u_{xx} + xyu_{yy} &= (c_1v_{xx} + c_2w_{xx}) + xy(c_1v_{yy} + c_2w_{yy}) \\ &= c_1(v_{xx} + xyv_{yy}) + c_2(w_{xx} + xyw_{yy}) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

+ 0,4

(b) Como cada u_n é solução da equação do calor, tendo em vista o princípio da superposição, vamos supor uma solução da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi t/1600} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40}.$$

+ 0,3

onde os coeficientes c_n precisam ser determinados. Assim, u é uma solução da equação do calor que, obviamente, satisfaz as condições de fronteira. Para que u satisfaça a condição inicial, devemos ter

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40},$$

ou seja, f deve ser representada por uma série de Fourier de senos. Estendendo f de forma ímpar no intervalo $[-40, 40]$ e periódica à toda reta de período 80, vemos que c_n devem ser os coeficientes de Euler-Fourier de f , i.e.,

$$c_n = \frac{2}{40} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx.$$

+ 0, 4

Vamos então calcular tais coeficientes:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20} \int_{10}^{30} 50 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx = \frac{5}{2} \int_{10}^{30} 50 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{5 \cdot 40}{2 n\pi} \left(-\cos \frac{n\pi x}{40} \Big|_{10}^{30} \right) \\ &= \frac{100}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

+ 0, 4

Portanto, obtemos a solução

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4} \right) e^{-n^2\pi t/1600} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40}.$$

+ 0, 4

(c) Suponha que

$$u(x, t) = F(x)G(t). \tag{1}$$

Substituindo u na equação e depois dividindo por a^2FG , obtemos

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{a^2G}. \tag{2}$$

Como o lado esquerdo de (2) depende somente de x e o lado direito somente de t , essas duas quantidades devem ser iguais a uma mesma constante, digamos $-\lambda$, ou seja,

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{a^2G} = -\lambda. \tag{3}$$

+ 0, 2

Assim, F e G devem satisfazer as EDO's

$$\begin{cases} F'' + \lambda F = 0, \\ G'' + a^2\lambda G = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Substituindo agora u nas condições de contorno, vemos que

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow F(0)G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$$

e

$$u_x(L, t) = 0 \Rightarrow F'(L)G(t) = 0 \Rightarrow F'(L) = 0.$$

Além disso,

$$u(x, 0) = 0 \Rightarrow F(x)G(0) = 0 \Rightarrow G(0) = 0.$$

Logo, F e G devem satisfazer

$$\begin{cases} F'' + \lambda F = 0, \\ F(0) = F'(L) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} G'' + a^2 \lambda G = 0, \\ G(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

+ 0, 2

Para resolver (5) devemos considerar separadamente os casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.

CASO 1. $\lambda < 0$.

A equação característica associada à EDO em (5) é $r^2 + \lambda = 0$ e portanto

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Mas,

$$\begin{cases} F(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ F'(L) = 0 \Rightarrow c_1 e^{L\sqrt{-\lambda}} - c_2 e^{-L\sqrt{-\lambda}} = 0. \end{cases}$$

As equações acima nos fornece um sistema linear homogêneo, cuja única solução é $c_1 = c_2 = 0$. Logo, (5) não possui autovalores negativos.

CASO 2. $\lambda = 0$.

Nesse caso, a EDO se reduz para $F'' = 0$ e portanto, $F(x) = c_1 x + c_2$. As condições $F(0) = F'(L) = 0$ trivialmente implicam que $c_1 = c_2 = 0$ e assim $\lambda = 0$ não é autovalor. + 0, 2

CASO 3. $\lambda > 0$.

Neste caso, a solução geral de (5) é dada por $F(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Agora, $F(0) = 0$ implica $c_1 = 0$, e assim $F'(L) = 0$ implica que $c_2 \sqrt{\lambda} \cos(L\sqrt{\lambda}) = 0$. Como queremos soluções não-triviais devemos ter $\cos(L\sqrt{\lambda}) = 0$. Logo,

$$\lambda = \lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

são autovalores de (5) com autofunções associadas

$$F(x) = F_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para os valores de λ em (7), voltamos em (6) e vemos que

$$G(t) = G_n(t) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2L}t\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

+ 0, 2

Portanto, as funções

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2L}t\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

são as soluções procuradas.

+ 0, 2