DM–IMECC–UNICAMP – Geometria Analítica e Vetores - MA141 - T. P
Prof. Marcelo M. Santos – **2a. prova, 16/10/2012**
Aluno: ______________________________ RA: ____________
Assinatura (idêntica à do RG): ___________________________________
Observações: ***Tempo de prova: 100min. Não é permitido o uso de qualquer equipamento eletrônico. Desligar o celular! Não destaque o grampo da prova. Todas as questões (suas resoluções) devem ser justificadas com o conhecimento da Matéria - cf. livro-texto.***

Questão 1 (1,0 ponto). Sem usar determinante, coordenadas, nem os vetores unitários canônicos $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, mostre a propriedade distributiva do produto vetorial em relação à soma: $(V+W)\times U = V\times U + W\times U$ (para vetores **quaisquer** U, V, W do $\mathbb{R}^3$). (Pode usar a propriedade distributiva do produto escalar e a propriedade $(V\times W)\cdot U = V\cdot(W\times U)$.)

2. a) (0,7) Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores

$$U=(1,1,2),\ V=(1,-1,0),\ W=(1,1,-1).$$

b) (0,6) Estes vetores são coplanares? (*Não esqueça de justificar, com conhecimento da Matéria.*) Determine a solução (x,y,z) da equação

$$xU+yV+zW=0.$$

c) (0,6) Determine a equação $ax+by+cz+d=0$ do plano Π passando pela origem e paralelo aos vetores U e V.

d) (0,6) Seja P o ponto de coordenadas (cartesianas) $(1,1,-2)$. Determine o ponto Q do plano Π tal que $\text{dist}(P,\Pi)=\text{dist}(P,Q)$.

3. a) (1,3) Dê a posição relativa dos planos

$$\Pi_1:\ 2x-y+3z=-2;\quad \Pi_2:\ 3x+y+2z=4;\quad \Pi_3:\ \tfrac{4}{3}x-\tfrac{2}{3}y+2z=1.$$

b) (0,6) Calcule as distâncias entre eles $(\text{dist}(\Pi_1,\Pi_2),\ \text{dist}(\Pi_1,\Pi_3),\ \text{dist}(\Pi_2,\Pi_3))$.

c) (0,6) Calcule os ângulos entre eles $(\cos(\Pi_1,\Pi_2),\ \cos(\Pi_1,\Pi_3),\ \cos(\Pi_2,\Pi_3))$.

4. a) (1,0) Sem fazer contas (usando o conhecimento da Matéria), responda: a equação $\text{dist}(P,F_1)+\text{dist}(P,F_2)=4$, em que $P\equiv(x,y)$, $F_1=(-1,0)$ e $F_2=(1,0)$, descreve uma cônica? **Sem fazer contas** (usando o conhecimento da Matéria), dê esta equação nas coordenadas (cartesianas) x,y.

b) (2,0) Escreva a equação $\text{dist}(P,F)=2\text{dist}(P,s)$ em coordenadas cartesianas x,y, onde $P\equiv(x,y)$, $F=(1,0)$ e s é a reta $x=-1$, e identifique a curva que a mesma descreve. Determine os focos, diretrizes, excentricidade e assíntotas, se existirem, e faça um esboço dessa curva.

5. Faça um esboço das curvas, dadas em coordenadas polares. Determine os focos, diretrizes, excentricidade e assíntotas, se existirem.

a) (1,0) $r=\dfrac{4}{2+2\text{sen}\theta}$.

b) (1,0) $r=4\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações. Boa prova!

Gabarito - P2 GA T.P 16/10/2012

Questão 1. V. livro-texto.

Questão 2. a) (0,7) *Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores* $U = (1, 1, 2)$, $V = (1, -1, 0)$, $W = (1, 1, -1)$.

O volume é dado pelo módulo do produto misto $(U \times V) \cdot W$

0, 2 pontos até aqui

$$(U \times V) \cdot W = \det \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

$+$ **0, 2**

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \cdots = 9$$

$+$ **0, 2**

Logo, o volume é $|9| = 9$. $+$ **0, 1**

b) (0,6) *Estes vetores são coplanares? (*Não esqueça de justificar, com conhecimento da Matéria.*) Determine a solução* (x, y, z) *da equação* $xU + yV + zW = 0$.

Os vetores não são coplanares, pois o volume do paralelepípedo determinado pelos mesmos (ou, o produto misto $(U \times V) \cdot W$) não é nulo (item **a)**). **0, 3**

Como visto na Matéria (teoria), os vetores são coplanares sse a equação $xU + yV + zW = 0$ tem solução não trivial ($(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$). Como não são coplanares, a (única) solução é $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. $+$ **0, 3**

c) (0,6) *Determine a equação* $ax + by + cz + d = 0$ *do plano* Π *passando pela origem e paralelo aos vetores* U *e* V.

$$N = U \times V = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (2, 2, -2)$$ é um vetor normal ao plano. **0, 2**

O plano passa pela origem, logo (tomando $x = y = z = 0$, obtemos $a0 + b0 + c0 + d = 0$) $d = 0$. $+$ **0, 2**

Então a equação é $x + y - z = 0$. $+$ **0, 2**

d) (0,6) *Seja* P *o ponto de coordenadas (cartesianas)* $(1, 1, -2)$. *Determine o ponto* Q *do plano* Π *tal que* $dist(P, \Pi) = dist(P, Q)$.

Sejam $P_0 = (0,0,0)$ (a origem), um ponto do plano, e $N = (1,1,-1)$, um vetor normal ao plano. (Sabemos que a $\text{dist}(P,\Pi)$ é dado por

$$\|\text{Proj}_N \vec{P_0P}\| = \frac{|\vec{P_0P}\cdot N|}{\|N\|} = \frac{|(1,1,-2)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{3}} = \frac{|1+1+2|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.)$$

O ponto Q é o ponto $\vec{P_0P} - \text{Proj}_N\vec{P_0P}$. **0,2**

$\vec{P_0P} - \text{Proj}_N\vec{P_0P} = (1,1,-2) - \frac{\vec{P_0P}\cdot N}{\|N\|^2}N$ $+\ \mathbf{0,2}$

$= (1,1,-2) - \frac{4}{3}(1,1,-1) = -(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}).$ $+\ \mathbf{0,2}$

Questão 3. a) (1,3) *Dê a posição relativa dos planos*

$\Pi_1 : 2x - y + 3z = -2;\quad \Pi_2 : 3x + y + 2z = 4;\quad \Pi_3 : \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y + 2z = 1.$

Vetores normais: $N_1 = (2,-1,3)\,(\perp\ \Pi_1)$, $N_2 = (3,1,2)\,(\perp\ \Pi_2)$, $N_3 = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 2)\,(\perp\ \Pi_3)$. **0,2**

$N_1 \,//\, N_3$ ($N_3 = \frac{2}{3}N_1$), logo os planos Π_1 e Π_3 são paralelos. $+\ \mathbf{0,4}$

Eles (Π_1 e Π_3) não são coincidentes, pois, e.g., o ponto $(0,0,1/2) \in \Pi_3$ e $\notin \Pi_1$. $+\ \mathbf{0,2}$

O plano Π_2 não é paralelo a Π_1 nem a Π_3, pois o vetor N_2 não é paralelo a N_1 (ou N_3) (as razões (3/2,−1 e 2/3) entre as coordenadas correspondentes de N_2 e N_1 não são iguais). $+\ \mathbf{0,4}$

Conclusão: dois planos são paralelos não coincidentes e um transversal (concorrente) a estes ($\Pi_1//\Pi_3$, $\Pi_2\cap\Pi_1 \neq \emptyset$, $\Pi_2\cap\Pi_3\neq\emptyset$). $+\ \mathbf{0,1}$

b) (0,6) *Calcule as distâncias entre eles* ($\text{dist}(\Pi_1,\Pi_2)$, $\text{dist}(\Pi_1,\Pi_3)$, $\text{dist}(\Pi_2,\Pi_3)$).

A distância entre planos concorrentes (com interseção não vazia) é zero, logo, $\text{dist}(\Pi_1,\Pi_2) = \text{dist}(\Pi_2,\Pi_3) = 0$. **0,2**

A distância entre os planos paralelos Π_1 e Π_3 é dada por

$$\text{dist}(P_0,\Pi_1) = \frac{|\vec{P_0P_1}\cdot N_1|}{\|N_1\|}$$

onde P_0 e P_1 são pontos (quaisquer) de Π_3 e Π_1, respectivamente. $+\ \mathbf{0,2}$

Tomando $P_0 = (0,0,1/2)$ e $P_1 = (0,0,-2/3)$, obtemos

$$\text{dist}(\Pi_1,\Pi_3) = \frac{|(0,0,(-2/3)-(1/2))\cdot(2,-1,3)|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{|\frac{-4-3}{6}3|}{\sqrt{14}} = \frac{7/2}{\sqrt{14}}.$$

$+\ \mathbf{0,2}$

c) (0,6) *Calcule os ângulos entre eles* ($\cos(\Pi_1,\Pi_2)$, $\cos(\Pi_1,\Pi_3)$, $\cos(\Pi_2,\Pi_3)$).

O ângulo entre planos paralelos é nulo, logo, $\cos(\Pi_1,\Pi_3) = \cos 0 = 1$. **0,2**

Como $\Pi_1//\Pi_3$, temos que $\cos(\Pi_2,\Pi_1) = \cos(\Pi_2,\Pi_3)$. $+\ \mathbf{0,2}$

O ângulo entre Π_2 e Π_1 (ou Π_3) é dado por

$$\cos(\Pi_2,\Pi_1) = \cos(N_2,N_1) = \frac{|N_2\cdot N_1|}{\|N_2\|\|N_1\|} = \frac{|(3,1,2)\cdot(2,-1,3)|}{\sqrt{9+1+4}\sqrt{4+1+9}} = \frac{|6-1+6|}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{11}{14}.$$

$+\ \mathbf{0,2}$

Questão 4. **a) (1,0)** ***Sem fazer contas*** *(usando o conhecimento da Matéria), responda: a equação* $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 4$*, em que* $P \equiv (x, y)$*,* $F_1 = (-1, 0)$ *e* $F_2 = (1, 0)$*, descreve uma cônica***?** ***Sem fazer contas*** *(usando o conhecimento da Matéria), dê esta equação nas coordenadas (cartesianas)* x, y*.*

Sim. Pela definição de elipse, a equação representa uma elipse. **0,4**
A distância entre os focos, F_1, F_2, é $2c = \text{dist}(F_1, F_2) = 2$, i.e. $c = 1$. Sabemos que quando os focos estão no eixo x e são da forma $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, então a equação da elipse é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$+\,\mathbf{0,3}$

sendo $2a = \text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2)$ e $b^2 = a^2 - c^2$. No caso em questão temos assim que $2a = 4$, i.e. $a = 2$ e $b^2 = 4 - 1 = 3$. Logo, a equação é

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$+\,\mathbf{0,3}$

b) (2,0) *Escreva a equação* $\text{dist}(P, F) = 2\text{dist}(P, s)$ *em coordenadas cartesianas* x, y*, onde* $P \equiv (x, y)$*,* $F = (1, 0)$ *e* s *é a reta* $x = -1$*, e identifique a curva que a mesma descreve. Determine os focos, diretrizes, excentricidade e assíntotas, se existirem, e faça um esboço dessa curva.*

Pela caracterização comum das cônicas (Proposição vista), a equação é de uma hipérbole com excentricidade $e = 2$ $(e > 1)$, (um) foco $F = (1, 0)$ e (uma) diretriz $x = -1$. **0,5**

Equação:

$\text{dist}(P, s) = \text{dist}((x, y), (-1, y)) = |x + 1|$.
$\text{dist}(P, F) = 2\text{dist}(P, s)$
$\Leftrightarrow \text{dist}(P, F)^2 = 4\text{dist}(P, s)^2$
$(x - 1)^2 + y^2 = 4(x + 1)^2$

$+\,\mathbf{0,4}$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(x^2 + 2x + 1)$
$3x^2 + 10x - y^2 = -3$

$+\,\mathbf{0,1}$

$3(x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{25}{9}) - y^2 = -3 + \frac{25}{3}$
$3(x + \frac{5}{3})^2 - y^2 = \frac{16}{3}$
$\boxed{\frac{(x+\frac{5}{3})^2}{16/9} - \frac{y^2}{16/3} = 1}$ $+\,\mathbf{0,2}$

Equação canônica de uma hipérbole, $\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$, nas coordenadas (cartesianas) $\bar{x} = x + \frac{5}{3}$, $\bar{y} = y$, com $a^2 = 16/9$ e $b^2 = 16/3$. Os focos, nas coordenadas $\bar{x}\bar{y}$, são $F_1 = (-\bar{c}, 0)$, $F_2 = (\bar{c}, 0)$ $(\bar{c} > 0)$, sendo $b^2 = \bar{c}^2 - a^2$, i.e. $16/3 = \bar{c}^2 - 16/9$, logo, $\bar{c}^2 = (16 \times 4)/9$, i.e. $\bar{c} = 8/3$. No sistema (original) xy, os focos são $F_1 = (-\frac{8}{3} - \frac{5}{3}, 0) = (-\frac{13}{3}, 0)$ e $F_2 = F$ $(= (1, 0))$. $+\ \mathbf{0,2}$

A diretriz em relação ao foco F_1 é dada por $x = -\frac{13}{3} + 2$, i.e. a reta $x = -7/3$. (Note que 2 é a distância da diretriz s $(x = -1)$ ao foco F (F_2).) $+\ \mathbf{0,2}$

Assíntotas: $\frac{1}{16/9} - \frac{y^2}{(16/3)(x+\frac{5}{3})^2} = \frac{1}{(x+\frac{5}{3})^2}$. Tomando x, y muito grandes vemos que a hipérbole 'aproxima-se' das retas $\frac{1}{16/9} - \frac{y^2}{(16/3)(x+\frac{5}{3})^2} = 0$, i.e.

$y^2 = \frac{16/3}{16/9}(x + \frac{5}{3})^2 = 3(x + \frac{5}{3})^2$, $\boxed{y = \pm 3(x + 5/3)}$. $+\ \mathbf{0,2}$

Gráfico: ... $+\ \mathbf{0,2}$

Questão 5. *Faça um esboço das curvas, dadas em coordenadas polares. Determine os focos, diretrizes, excentricidade e assíntotas, se existirem.*

a) (1,0) $r = \dfrac{4}{2 + 2\text{sen}\theta}$.

$r = \dfrac{2}{1 + 1\text{sen}\theta}$ $+\ \mathbf{0,2}$

Equação do tipo $r = \dfrac{de}{1 + e\text{sen}\theta}$, uma parábola (excentricidade $e = 1$) $+\ \mathbf{0,2}$

e $d = 2$, distância da diretriz ao foco (polo); $+\ \mathbf{0,2}$

diretriz acima do e paralela ao eixo polar. $+\ \mathbf{0,2}$

Gráfico: ... $+\ \mathbf{0,2}$

b) (1,0) $r = 4\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$.

Equação do tipo $r = 2a\cos(\theta - \alpha)$, sendo $a = 2$ e $\alpha = \frac{\pi}{4}$: uma circunferência de centro $(a, \alpha) = (2, \frac{\pi}{4})$ (em coordenadas polares) e raio $a = 2$. V. exercício do livro-texto. $\mathbf{0,6}$

Gráfico: ... $+\ \mathbf{0,4}$