Exercício. Resolver o problema

$$y'' + \omega^2 y = \text{sen} nt, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

onde n é um inteiro positivo e $\omega^2 \neq n^2$ (usando séries de Fourier). O que acontece se $\omega^2 = n^2$?

Resolução. (Tentando encontrar solução periódica, com período 2π, por séries de Fourier, i.e. $y = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \text{sen} kt)$, vemos que o problema não tem solução desta forma – a condição $y'(0) = 0$ não será satisfeita.)

A solução geral da equação homogênea associada é (fácil de se obter)

$$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \text{sen} \omega t,$$

logo a solução do problema deve ser (pela teoria das EDOs lineares de segunda ordem)

$$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \text{sen} \omega t + y_p,$$

onde y_p é uma solução particular da equação e c_1, c_2 são constantes tais que as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 0$ são satisfeitas. Tendo em vista o lado direito da equação, procuramos uma solução particular que seja uma função ímpar e periódica, com período 2π, i.e. y_p da forma

$$y_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen} kt.$$

Derivando e substituindo na equação chegamos a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\omega^2 - k^2) b_k \text{sen} kt = \text{sen} nt;$$

logo

$$(\omega^2 - k^2) b_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = n \\ 0, & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

Como $\omega^2 \neq n^2$, segue-se que

$$b_n = 1/(\omega^2 - n^2).$$

Tomando $b_k = 0$ para todo $k \neq n$, obtemos

$$y_p = \frac{1}{\omega^2 - n^2}\text{sen}nt,$$

logo

$$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \text{sen}\omega t + \frac{1}{\omega^2 - n^2}\text{sen}nt.$$

Impondo as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 0$ vem que $c_1 = 0$ e $c_2 = -n/\omega(\omega^2 - n^2)$. Portanto, a solução é

$$\boxed{y = \tfrac{1}{\omega^2-n^2}\text{sen}nt - \tfrac{n}{\omega(\omega^2-n^2)}\text{sen}\omega t}.$$

Caso $\omega^2 = n^2$, o lado direito da equação, sennt, é uma solução da equação homogênea e o método acima não fornece uma solução particular. (Pelo método de variação dos parâmetros ou dos coeficientes indeterminados podemos encontrar uma solução particular $y_p = -(t \cos nt)/2n$.)